

Alexander Meyer

Untersuchung zur Ausnutzung plastischer
Tragfähigkeiten bei Stahlprofilen

DIPLOMARBEIT

HOCHSCHULE MITTWEIDA

UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Maschinenbau

Fachbereich Stahl- und Metallbau

Mittweida, 2011

Alexander Meyer

Untersuchung zur Ausnutzung plastischer
Tragfähigkeiten bei Stahlprofilen

eingereicht als

DIPLOMARBEIT

an der

HOCHSCHULE MITTWEIDA

UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Maschinenbau

Annaberg-Buchholz, 2011

Erstprüfer: Prof. Dr.-Ing. Mohsen Rahal
Zweitprüfer: Dipl.-Ing.(FH) Annett Meyer

Vorgelegte Arbeit wurde verteidigt am:

Bibliographische Beschreibung und Kurzreferat

Bibliographische Beschreibung:

Meyer, Alexander:

„Untersuchung zur Ausnutzung plastischer Tragfähigkeiten bei Stahlprofilen“ -126 S.

Mittweida, Hochschule Mittweida, Fakultät Maschinenbau & Feinwerktechnik,

Fachbereich Stahl- und Maschinenbau,

Diplomarbeit, 2011

Referat:

Ziel der Diplomarbeit ist eine Untersuchung der Berechnung des plastischen Grenzbiegemomentes. Hierbei erfolgt die Berechnung anhand verschiedener Werkstoffgesetze, die das Spannungs-Dehnungs-Verhalten des verwendeten Werkstoffes beschreiben. Die Berechnungen werden für den Baustahl S235 und den folgenden Querschnitten geführt:

- Rechteck
- Doppel-T
- U-Querschnitt

Die Berechnungen sollen zeigen, ob eine höhere Ausnutzung des Querschnittes gegenüber der „üblichen Bemessungsmethode“ möglich ist. In einem praktischen Versuch werden die Annahmen der Berechnungen überprüft werden. Abschließend erfolgt eine Modellierung und Analyse des praktischen Versuches nach der Methode der finiten Elemente mit dem FEM-Programm ANSYS.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis.....	IV
I Abbildungsverzeichnis.....	VII
II Diagrammverzeichnis.....	IX
III Tabellenverzeichnis.....	IX
IV Formelverzeichnis.....	XI
0 Einleitung und Problemstellung.....	1
1 Grundlagen.....	3
1.1 Grenzbiegemomente.....	6
1.2 Berechnungen der Grenzbiegemomente.....	6
1.2.1 Das elastische Grenzbiegemoment.....	6
1.2.2 Das plastische Grenzbiegemoment.....	9
2 Approximation des Spannungs- Dehnungs- Diagrammes.....	13
2.1 Bildung der Werkstoffgesetze.....	15
2.1.1 Lineare- Näherungen des Werkstoffverhaltens.....	15
2.1.2 Nichtlineare- Näherungen des Werkstoffverhaltens.....	16
2.2 Berechnungen am Rechteck.....	18
2.2.1 Idealelastisches Werkstoffverhalten.....	18
2.2.2 Idealplastisches Werkstoffverhalten.....	20
2.2.3 Bilineare Approximation mit linearem Verfestigungsverlauf.....	21
2.2.4 Trilineare Approximation mit Lüdersdehnung.....	25
2.2.5 Potenz- Approximation nach Ramberg-Osgood.....	29
2.2.6 Potenz- Approximation nach Ludwik.....	31
2.2.7 Übersicht und Auswertung der Berechnungen am Rechteck.....	34
2.3 Berechnungen am Doppel-T Querschnitt.....	35
2.3.1 Idealelastisches Werkstoffverhalten.....	36

2.3.2	Idealplastisches Werkstoffverhalten	38
2.3.3	Bilineare Approximation mit linearem Verfestigungsverlauf	39
2.3.4	Trilineare Approximation mit Lüdersdehnung	42
2.3.5	Potenz- Approximation nach Ramberg-Osgood	45
2.3.6	Potenz- Approximation nach Ludwik	46
2.3.7	Übersicht und Auswertung	49
2.4	Berechnungen am Doppel-T und Biegung um z	50
2.4.1	Idealplastisches Werkstoffverhalten	50
2.4.2	Bilineare Approximation	51
2.4.3	Potenz- Approximation nach Ramberg-Osgood	54
2.4.4	Übersicht und Auswertung der Berechnungen	56
2.5	Berechnung am U-Querschnitt	57
2.5.1	Idealelastisches Werkstoffverhalten	58
2.5.2	Idealplastisches Werkstoffverhalten	59
2.5.3	Bilineare Approximation mit linearem Verfestigungsverlauf	60
2.5.4	Trilineare Approximation mit Lüdersbereich	63
2.5.5	Potenz- Approximation nach Ramberg-Osgood	66
2.5.6	Potenz- Approximation nach Ludwik	67
2.5.7	Übersicht und Auswertung der Berechnungen am U-Querschnitt.....	69
2.6	Zusammenfassung und Auswertung der Berechnungen	70
3	Experimentelle Dehnungs-und Verformungsbestimmung	73
3.1	Grundlagen und Ablauf der Versuchsdurchführung	73
3.1.1	Grundlagen der Spannungs-und Dehnungsmessung mittels DMS.....	73
3.1.2	Wheatstonesche-Brückenschaltung	75
3.2	Auswahl des Querschnittes	78
3.2.1	Statisches System des Versuches	81
3.2.2	Prüfstand und Versuchsaufbau	82

3.3	Elastische Dehnungs- und Verformungsbestimmungen	83
3.3.1	Versuchsergebnisse Elastisch.....	84
3.3.2	Versuchsauswertung Elastisch.....	85
3.4	Plastische Dehnungs- und Verformungsbestimmung	93
3.4.1	Versuchsergebnisse Plastisch.....	93
3.4.2	Versuchsauswertung Plastisch.....	94
3.5	Auswertung der Messergebnisse und analytischen Berechnung.....	100
4	Analyse mittels FEM-Programm.....	103
4.1	Modellierung des Versuchsträgers	104
4.1.1	FE-Netz Generierung	105
4.1.2	Belastung und Randbedingungen	105
4.1.3	Überprüfung der Struktur und Randbedingungen.....	106
4.2	Analyse der Werkstoffgesetze am Versuchsträger	107
4.2.1	Analyse nach idealelastischem Werkstoffgesetz	109
4.2.2	Analyse nach elastisch-idealplastischem Werkstoffgesetz	111
4.2.3	Analyse nach bilinearem Werkstoffgesetz mit linearer Verfestigung.....	113
4.3	Zusammenfassung der ANSYS-Analysen.....	117
5	Zusammenfassung und Ausblick.....	118
V	Anlagen	120
VI	Literaturverzeichnis	125

I Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1-1 Werkstoffgesetze nach DIN 18800	3
Abbildung 1-2 Besonderheiten des S-D-Verhaltens unlegierter Stähle [2]	4
Abbildung 1-3 Grenzbiegemomente	7
Abbildung 2-1 Spannungs- Dehnungs- Diagramm für den Baustahl S235 [5].....	13
Abbildung 2-2 Lineare Näherungen der Werkstoffverhaltens.....	15
Abbildung 2-3 Nichtlineare Näherungen des Werkstoffverhaltens	16
Abbildung 2-4 Elastischer Spannungsverlauf am Rechteck.....	18
Abbildung 2-5 QS mit Spannungsverlauf Idealplastisch	20
Abbildung 2-6 QS mit Dehnung und bilinearen Spannungsverlauf	21
Abbildung 2-7 QS mit Dehnung und trilinearen Spannungsverlauf	25
Abbildung 2-8 Werkstoffverhalten mit Lüdersdehnung	25
Abbildung 2-9 Funktion nach Ramberg-Osgood.....	29
Abbildung 2-10 Spannungsverlauf nach Ramberg-Osgood	30
Abbildung 2-11 Funktion nach Ludwik	32
Abbildung 2-12 HEB100 Querschnitt idealisiert	35
Abbildung 2-13 Querschnittswerte HEB100 idealisiert.....	36
Abbildung 2-14 QS mit Dehnungs-und Spannungsverlauf Idealelastisch	36
Abbildung 2-15 QS und Spannungsverteilung Idealplastisch.....	38
Abbildung 2-16 QS mit Dehnungs-und bilinearem Spannungsverlauf	39
Abbildung 2-17 Trilineares Werkstoffverhalten mit Lüdersdehnung	42
Abbildung 2-18 QS und Spannungsverlauf nach Ramberg-Osgood	45
Abbildung 2-19 Querschnitt und Spannungsverlauf nach Ludwik	47
Abbildung 2-20 Querschnitt und Spannungsverlauf Idealplastisch Biegung	50
Abbildung 2-21 QS mit Dehnungs-und bilinearem Spannungsverlauf	51
Abbildung 2-22 Querschnitt und Spannungsverlauf nach Ramberg-Osgood	54
Abbildung 2-23 U-100 idealisiert.....	57

Abbildung 2-24 U-Profil Spannungsverlauf Idealelastisch.....	58
Abbildung 2-25 QS und Spannungsverlauf Idealplastisch	59
Abbildung 2-26 QS mit Dehnungs-und bilinearem Spannungsverlauf	60
Abbildung 2-27 Trilineares Werkstoffverhalten mit Lüdersdehnung	63
Abbildung 2-28 QS mit Dehnungs-und Spannungsverlauf nach R.-Osgood	66
Abbildung 2-29 U-Profil mit Spannungsverlauf nach Ludwik.....	67
Abbildung 2-30 Spannungsverlauf der Werkstoffgesetze	71
Abbildung 3-1 Aufbau eines DMS.....	74
Abbildung 3-2 Wheatstonsche Brückenschaltung.....	75
Abbildung 3-3 Fehlerquellen und Störeinflüsse auf eine DMS- Messstelle [10]	76
Abbildung 3-4 Viertelbrücke mit Kompensations-DMS	77
Abbildung 3-5 Statisches System und Schnittgrößenverlauf.....	81
Abbildung 3-6 Prüfstand und Versuchsaufbau.....	82
Abbildung 3-7 HEB100- Zustand bei Versuchsbeginn	95
Abbildung 3-8 HEB100- Zustand nach dem Versuch.....	95
Abbildung 3-9 Spannungs- und experimenteller Dehnungsverlauf für Mel.....	98
Abbildung 3-10 Idealplastischer Spannungs-Dehnungs-Verlauf für Mpl	99
Abbildung 3-11 Spannungs-und experimenteller Dehnungsverlauf für Mpl.....	99
Abbildung 4-1 Model HEB100	104
Abbildung 4-2 FE-Netz komplett mit Detailansicht.....	105
Abbildung 4-3 Randbedingungen	105
Abbildung 4-4 Verschiebung in X	106

II Diagrammverzeichnis

Diagramm 1 Auswertung der Berechnungen am Rechteck-QS	34
Diagramm 2 Auswertung der Berechnungen am Doppel-T-Querschnitt	49
Diagramm 3 I Auswertung der Berechnungen am Doppel-T-QS bei Biegung um z	56
Diagramm 4 Auswertung der Berechnungen am U-Querschnitt	69
Diagramm 5 Kraft-Verformungs-Diagramm Elastisch	90
Diagramm 6 S-D-Diagramm DMS-Steg	91
Diagramm 7 S-D-Diagramme DMS-Gurt	92
Diagramm 8 Kraft-Verformungs-Diagramm Plastisch	94
Diagramm 9 Kraft-Dehnungs-Diagramm Plastisch	96
Diagramm 10 Kraft-Dehnungs-Diagramm mit Fel und Fpl	98
Diagramm 11 Kraft-Verformungs-Diagramm Plastisch	102
Diagramm 12 Linearisierte Normalspannung DMS-Steg	115
Diagramm 13 Linearisierte Normalspannung DMS-Gurt.....	116

III Tabellenverzeichnis

Tabelle 1 Nachweisverfahren	3
Tabelle 2 Ergebnisse der Berechnungen am Rechteck	34
Tabelle 3 Ergebnisse der Berechnungen am Doppel-T-Querschnitt	49
Tabelle 4 Ergebnisse der Berechnungen am Doppel-T-QS bei Biegung um z	56
Tabelle 5 Querschnittswerte U100 idealisiert.....	57
Tabelle 6 Ergebnisse der Berechnungen.....	69
Tabelle 7 Auswertung der Berechnungsverfahren.....	70
Tabelle 8 Versuchsergebnisse Elastisch	84
Tabelle 9 Zusammenfassung Versuch und Berechnungen Elastisch	87
Tabelle 10 Zusammenfassung Versuch und Berechnungen mit veränd. E-Modul	88

Tabelle 11 Zusammenfassung Versuch und Berechnungen Elastisch	89
Tabelle 12 Mittelwert der Kraft F und der Verformung w der Versuche Elastisch.....	90
Tabelle 13 Versuchsergebnisse Plastisch	93

IV Formelverzeichnis

Formel	Einheit	Bedeutung
A	mm ²	Fläche
C	N/mm ²	Werkstoffkonstante
ε	[µm/m]	Dehnung
ε_u	[%]	Dehnung der Zugfestigkeit
$\varepsilon_F, \varepsilon_y$	[%]	Dehnung der Streckgrenze
γ_m	[-]	Teilsicherheitsbeiwert
$\sigma_{R,d}$	[N/mm ²]	Grenznormalspannung
α_{pl}	[-]	plastischer Formbeiwert
M	[KNm]	Biegemoment
M_{el}	[KNm]	elastisches Grenzbiegemoment
M_{pl}	[KNm]	plastisches Grenzbiegemoment
$M_{pl,20}$	[KNm]	plastisches Grenzbiegemoment mit 20% Randdehnung
W_{el}	[cm ³]	elastisches Widerstandsmoment
W_{pl}	[cm ³]	plastisches Widerstandsmoment
S	[cm ³]	Flächenmoment 1.Grades
$R_{P0,2}$	[N/mm ²]	0,2% Dehngrenze

R_p	[N/mm ²]	Proportionalitätsgrenze
$f_{u,k}$	[N/mm ²]	Zugfestigkeit
$R_{eL} = f_{y,k}$	[N/mm ²]	Streckgrenze
R_{eH}	[N/mm ²]	obere Streckgrenze
F	[N]	Kraft
w	[mm]	Verformung
ε_a	[µm/m]	Anzeigewert der Dehnung
k	[-]	Proportionalitätsfaktor
R	[Ω]	Widerstand
dR	[Ω]	Widerstandsänderung
l	[mm]	Länge
dl	[mm]	Längenänderung
E_v	[N/mm ²]	Verfestigungsmodul
E	[N/mm ²]	Elastizitätsmodul
σ_F	[N/mm ²]	Fließspannung
n	[-]	Konstante nach R.-Osgood
n_L	[-]	Konstante nach Ludwik
K_L	[N/mm ²]	Werkstoffkonstante nach Ludwik

0 Einleitung und Problemstellung

Die Eigenschaften und Qualität des Werkstoffes „Stahl“ haben sich in den letzten Jahren rasant entwickelt. Durch verbesserte Technologien lassen sich Stahleigenschaften gezielt einstellen und werden vom Hersteller garantiert.

Die verbesserten mechanischen Eigenschaften und die Sicherheit der garantierten Qualität lieferte die Grundidee dieser Arbeit. Demnach sollte es möglich sein, die Tragfähigkeiten eines Profils nach eben diesen garantierten mechanischen Werkstoffeigenschaften zu bemessen.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Untersuchung der Tragfähigkeiten von Stahlprofilen. In den Normen DIN18800 und Eurocode3 werden Querschnitte durch verschiedene Nachweisverfahren bzw. einer Einteilung in unterschiedliche Querschnittsklassen diesbezüglich beurteilt [1]. Bei der Nachweisführung Elastisch-Elastisch nach DIN18800 ist die Tragfähigkeit eines Querschnittes erreicht, wenn an einer Stelle die Grenzspannung $\sigma_{R,d}$ erreicht wird. Das dazugehörige Biegemoment wird als elastisches Grenzbiegemoment bezeichnet. Darüber hinaus kann der Querschnitt jedoch noch weiter belastet werden. Dies wird im Nachweisverfahren Elastisch-Plastisch und Plastisch-Plastisch berücksichtigt. Die Tragfähigkeit des Querschnittes ist hierbei erreicht, wenn alle Fasern an der maximal beanspruchten Stelle die Grenzspannung $\sigma_{R,d}$ erreicht haben. Der Querschnitt ist somit vollständig durchplastiziert. Das dem vollplastischen Zustand entsprechende Biegemoment wird als plastisches Grenzbiegemoment bezeichnet. Die Berechnung wird hierbei anhand eines idealplastischen Werkstoffgesetzes geführt, das eine konstant bleibende Spannung annimmt. Dieses Werkstoffverhalten entspricht einer idealisierten Näherung des im einachsigen Zugversuch ermittelten Spannungs-Dehnungs-Verhaltens des Werkstoffes. Es bildet eine einfache Rechengrundlage, ohne jedoch das reale Werkstoffverhalten zu berücksichtigen. In dieser Arbeit wird das reale Werkstoffverhalten für die Berechnung des Biegemomentes berücksichtigt. Es wird untersucht, ob eine höhere Ausnutzung der Tragfähigkeiten eines Querschnittes nach dieser Berechnung möglich ist und in welcher Größenordnung diese für ausgewählte Querschnitte zu erwarten ist. Die Berechnungen werden für den Rechteck, Doppel-T und den U-Querschnitt geführt.

Konzeption:

- ❖ Beschreibung der Grenzbiegemomente und Grundlagen des Werkstoffverhaltens des zu untersuchenden Baustahls S235
- ❖ Approximation des im einachsigen Zugversuch ermittelten Spannungs-Dehnungs-Verhaltens des Werkstoffes anhand linearer und nichtlinearer Werkstoffgesetze
- ❖ Berechnung des plastischen Biegemomentes nach den zuvor bestimmten Werkstoffgesetzen
- ❖ Ausführliche Durchführung und Beschreibung der Berechnungen am Rechteck
 - Berechnungen am *doppelsymmetrischen* Querschnitt
 - Berechnung bei Biegung um die starke Achse
 - Übersicht und Auswertung der Berechnungen
 - Berechnung bei Biegung um die schwache Achse
 - Übersicht und Auswertung der Berechnungen
 - Berechnungen am *einfachsymmetrischen* Querschnitt
 - Berechnung bei Biegung um die starke Achse
 - Übersicht und Auswertung der Berechnungen
- ❖ Vorbereitung, Durchführung und Auswertung der experimentellen Dehnungs- und Verformungsbestimmung am HEB100
- ❖ Modellierung des praktischen Versuches nach der Methode der finiten Elemente mit dem FEM-Programm ANSYS
 - Analyse der Normalspannung, Vergleichsspannung und Dehnung
- ❖ Zusammenfassung und Ausblick

1 Grundlagen

In der DIN 18800 werden die Tragsicherheitsnachweise in drei Nachweisverfahren eingeteilt.

Tabelle 1 Nachweisverfahren

Nachweis- verfahren	Berechnung der Beanspruchungen	Berechnung der Beanspruchbarkeiten	Grenzzustände der Tragsicherheit
Elastisch-Elastisch (EL-EL)	Elastizitätstheorie	Elastizitätstheorie	Beginn des Fließens
Elastisch-Plastisch (EL-PL)	Elastizitätstheorie	Plastizitätstheorie	Durchplastizieren des Querschnittes
Plastisch-Plastisch (PL-PL)	Plastizitätstheorie	Plastizitätstheorie	Ausbildung von Fließgelenken

Entsprechend der Nachweisverfahren erfolgt die Berechnung der Schnittkräfte bei den Nachweisen EL-EL und EL-PL nach der Elastizitätstheorie, dies entspricht einem linearelastischen Werkstoffverhalten Abbildung 1-1b). Die Berechnung der Beanspruchbarkeiten bei den Nachweisen EL-PL; PL-PL erfolgt nach dem idealplastischen Werkstoffverhalten nach Abbildung 1-1a).

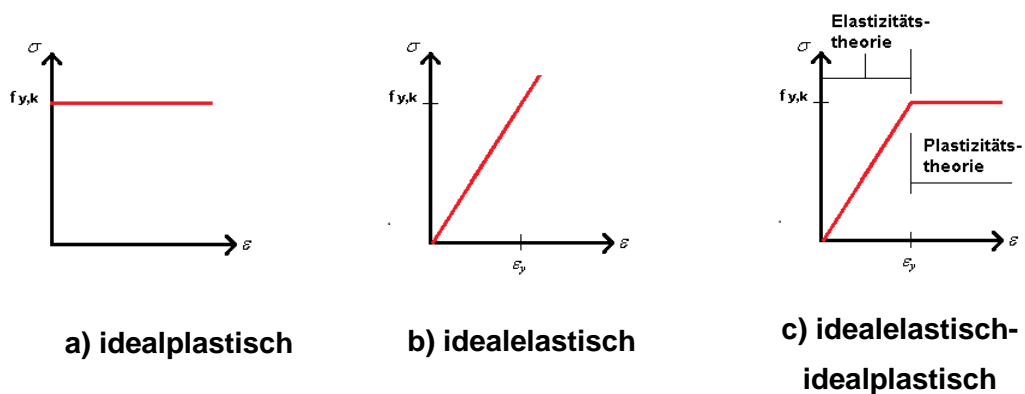


Abbildung 1-1 Werkstoffgesetze nach DIN 18800

Das idealelastische Werkstoffverhalten bildet die Grundlage der Elastizitätstheorie. Die Spannungen verhalten sich proportional zu den Dehnungen. Das Ende der Hookeschen-Geraden beschreibt dabei den Gültigkeitsbereich der Elastizitätstheorie [1].

In Abbildung 1-2 ist das Spannungs-Dehnungs-Verhalten eines unlegierten Stahles mit seinen Besonderheiten im kleinen Dehnbereich dargestellt.

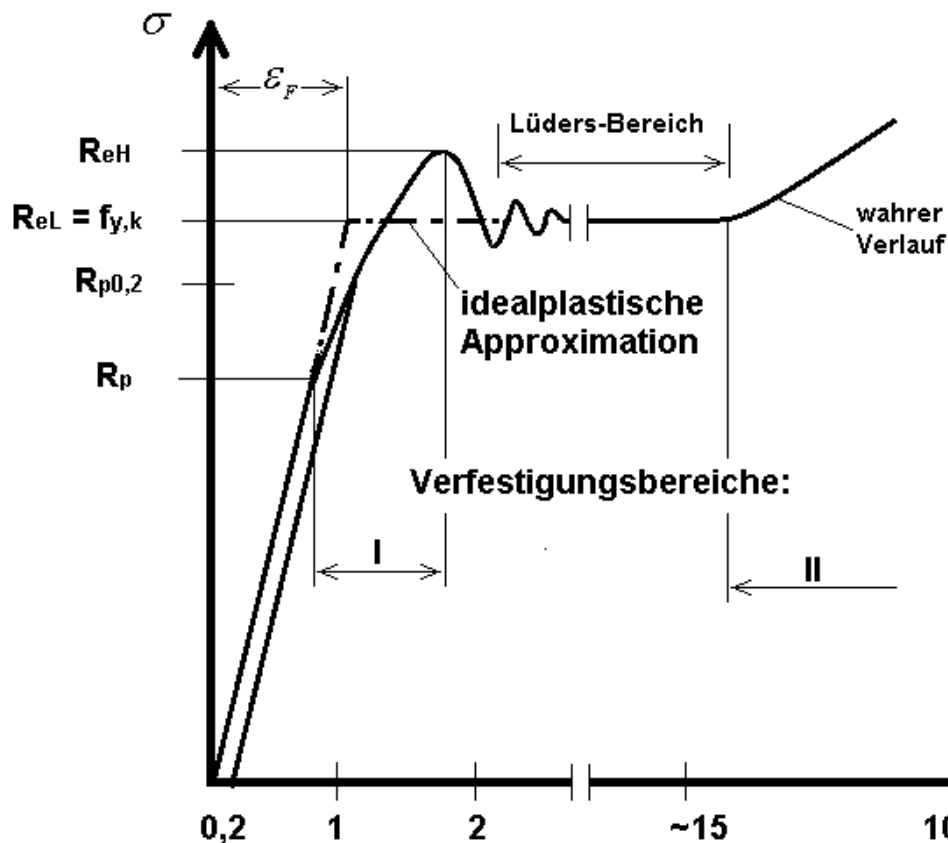


Abbildung 1-2 Besonderheiten des S-D-Verhaltens unlegierter Stähle [2]

Der Werkstoff verhält sich elastisch bis zur Proportionalitätsgrenze R_p und anschließend verfestigend. Der Verfestigungsvorgang endet an der oberen Fließgrenze R_{eH} und fällt danach abrupt auf die untere Fließgrenze R_{eL} ab [2]. Der Werkstoff befindet sich an der oberen Fließgrenze in einer labilen Gleichgewichtslage.

Eine weitere Besonderheit unlegierter Stähle ist das Vorhandensein eines Lüders-Bereiches. In diesem auf dem Spannungsabfall beginnenden Bereich bleibt die Spannung konstant, die Dehnungen nehmen hierbei bis zum Beginn des Verfestigungsbereiches II weiter zu. Mit dem Beginn des Verfestigungsbereiches II steigen die Spannung und Dehnungen bis zum Erreichen der Zugfestigkeit weiter an. Für die Näherung idealplastisch wird die untere Fließgrenze als maßgebende Fließspannung verwendet, hier beginnt der Werkstoff im eigentlichen Sinne zu fließen.

Die in Abbildung 1-2 dargestellte Strich-Punkt-Linie zeigt die Näherung der für die Berechnungen verwendeten Werkstoffgesetze nach Abbildung 1-1c). Hierbei zeigt sich bereits, dass die Verfestigungsbereiche bei Berechnungen unberücksichtigt bleiben.

Besonderheiten der plastischen Deformation bei Metallen:

Metalle verhalten sich elastisch, solange die aufgebrachten Lasten bzw. die aufgeprägten Deformationen eine bestimmte Größe nicht überschreiten, diese Grenze wird als Streckgrenze bzw. Quetschgrenze ($f_{y,k}$) bezeichnet. Wird die Streck- bzw. Quetschgrenze des Werkstoffes erreicht, kommt es zum plastischen Fließen [3].

1.1 Grenzbiegemomente

Bei der Nachweisführung mit dem Verfahren Elastisch- Plastisch werden den Schnittgrößen die Grenzschnittgrößen gegenübergestellt. Der vollplastische Zustand des Stabquerschnittes nach der idealplastischen Spannungs-Dehnungs-Beziehung stellt dabei die Grenzschnittgröße dar.

Die folgenden Annahmen gelten für die Berechnung der Grenzschnittgrößen:

- idealelastisch-idealplastisches Spannungs-Dehnungs-Verhalten
- Ebenbleiben des Querschnittes
- Fließbedingung nach Mises-Huber-Hencky

Des Weiteren sind die Teilsicherheitsbeiwerte γ_M für den Werkstoff zu berücksichtigen und mit Ausnahmen die Grenzbiegemomente auf den 1,25-fachen Wert des elastischen Grenzbiegemomentes zu begrenzen [4].

1.2 Berechnungen der Grenzbiegemomente

Im folgenden Berechnungsbeispiel soll die Berechnung des elastischen und plastischen Grenzbiegemomentes beispielhaft an einem einfachsymmetrischen Querschnitt erklärt und berechnet werden. Die Besonderheiten des Werkstoffverhaltens werden dabei beschrieben.

1.2.1 Das elastische Grenzbiegemoment

Der in Abbildung 1-3 dargestellte Querschnitt wird durch ein Biegemoment M beansprucht. Infolge der Beanspruchung entstehen im Querschnitt Biegespannungen. Mit steigendem Biegemoment wird zunächst an den unteren Fasern des Querschnittes die Grenzspannung $\sigma_{R,d}$ erreicht. Dieser Zustand entspricht dem Grenzzustand der Tragfähigkeit für den Nachweis Elastisch-Elastisch. Das zugehörige Biegemoment wird als elastisches Grenzbiegemoment $M_{el,d}$ bezeichnet.

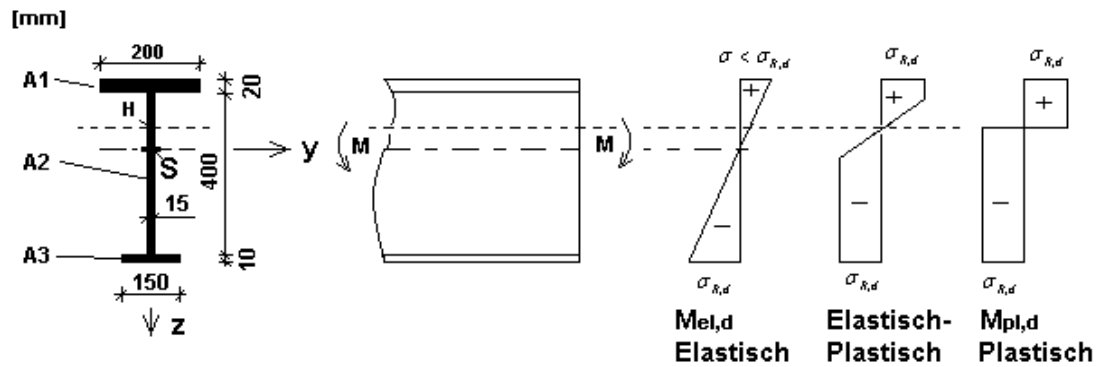


Abbildung 1-3 Grenzbiegemomente

In der Abbildung ist die Schwereachse und die Änderung der neutralen Achse unter Wirkung des Biegemomentes dargestellt.

Bestimmung des Gesamtschwerpunktes:

$$A1 = 200 \cdot 20 = 4000 \text{ mm}^2$$

$$A2 = 400 \cdot 15 = 6000 \text{ mm}^2$$

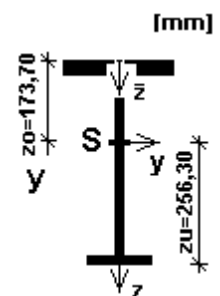
$$A3 = 150 \cdot 10 = 1500 \text{ mm}^2$$

$$\bar{z}_s = \frac{\sum A_i \cdot z_i}{\sum A_i} \quad (1.1)$$

$$\bar{z}_s = \frac{4000 \cdot 10 + 6000 \cdot 220 + 1500 \cdot 425}{4000 + 6000 + 1500} \quad [\text{mm}]$$

$$\bar{z}_s = z_o = 17,37 \text{ cm}$$

$$\bar{z}_u = 43 - 17,4 = 25,63 \text{ cm}$$



Bestimmung des Flächenmomentes 2.Grades:

$$I_y = \int_A z^2 dA \quad (1.2)$$

$$I_y = \int_0^{15,37} (z^2 * 1,5 * dz) + \int_{15,37}^{17,37} (z^2 * 20 * dz) + \int_0^{24,63} (z^2 * 1,5 * dz) + \int_{24,63}^{25,63} (z^2 * 15 * dz)$$

$$\underline{I_y = 29493 \text{ cm}^4}$$

Ermittlung des Bemessungswertes der Streckgrenze:

$$\sigma_{R,d} = \frac{f_{y,k}}{\gamma_m} \quad (1.3)$$

- charakteristische Werte der Streckgrenze S235: $f_{y,k} = 240 \text{ N/mm}^2$
- Teilsicherheitsbeiwert der Widerstandsgröße: $\gamma_m = 1,1$

$$\sigma_{R,d} = \frac{24 \text{ KN/cm}^2}{1,1} \quad (1.4)$$

$$\underline{\sigma_{R,d} = 21,82 \frac{\text{KN}}{\text{cm}^2}}$$

Berechnung des elastischen Grenzbiegemomentes:

$$M = \frac{\sigma * I_y}{z} \quad (1.5)$$

mit $\sigma_{R,d} = 21,82 \text{ KN/cm}^2$; $I_y = 29493 \text{ cm}^4$; $z_u = 25,63 \text{ cm}$

$$M_{el,d} = \frac{21,82 * 29493}{25,63} [\text{KNcm}] \quad (1.6)$$

$$\underline{M_{el,d} = 251 \text{ KNm}}$$

Bei elastischer Beanspruchung verläuft die neutrale Achse durch den Gesamtschwerpunkt des Querschnittes.

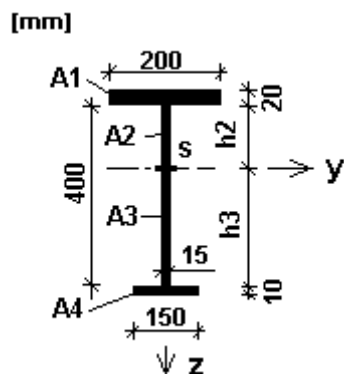
1.2.2 Das plastische Grenzbiegemoment

Plastizierung des Querschnittes:

Mit dem Erreichen der elastischen Grenzspannung ist die elastische Querschnittstragfähigkeit erreicht. Darüber hinaus kann der Querschnitt jedoch weitere Belastung aufnehmen, da bisher nur die äußeren Fasern die Grenzspannung erreicht haben. Wird die Belastung nun immer weiter gesteigert, so werden die benachbarten Fasern beansprucht, bis auch diese die Grenzspannung erreicht haben. Die Plastizierung erfolgt vom Rande aus ins Innere des Querschnittes.

Mit dem Plastizieren des Querschnittes nehmen der elastische Querschnittsbereich und damit verbunden die Biegesteifigkeit des Querschnittes ab. Die neutrale Achse des Querschnittes wandert von der Schwereachse S in Richtung der Flächenhalbierenden H . Haben alle Fasern des Zug- und Druckbereichs die Grenzspannung $\sigma_{R,d}$ erreicht, ist der Querschnitt durchplastiziert. Das maximal aufnehmbare Biegemoment, das plastische Grenzbiegemoment ist damit erreicht [1].

Bestimmung der Flächenhalbierenden:



$$\sum H = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D = A1 * \sigma_{R,d} + A2 * \sigma_{R,d} \\ Z = A3 * \sigma_{R,d} + A4 * \sigma_{R,d} \end{array} \right\} \Rightarrow A1 + A2 = A3 + A4$$

Die Spannungsnulllinie ist bei der elastischen Berechnung die Schwereachse. Bei der plastischen Berechnung ist die Flächenhalbierende die Spannungsnulllinie. Bei doppelsymmetrischen Querschnitten fallen die Nulllinie und die Schwerelinie zusammen.

$$A1 + A2 = A3 + A4$$

$$A1 + 15 * h2 = 15 * h3 + A4$$

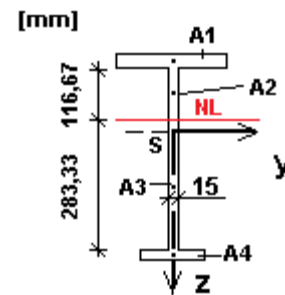
$$h2 + h3 = 400$$

$$h2 = 400 - h3$$

$$A1 + 15 * (400 - h3) = 15 * h3 + A4$$

$$4000 + 15 * (400 - h3) = 15 * h3 + 1500$$

$$h3 = 283,33\text{mm}; h2 = 116,67\text{mm}$$



Kontrolle :

$$4000 + 15 * 116,67 = 15 * 283,33 + 1500$$

$$5750 = 5750$$

Mit dem Durchplastizieren des Querschnittes bilden sich zwei Spannungsblöcke. Die resultierenden Kräfte dieser Zug- und Druckkomponenten greifen jeweils im Schwerpunkt der Teilflächen an. Das Produkt der resultierenden Kräfte mit ihrem jeweiligen Abstand zur Nulllinie ergeben die plastischen Biegemomente der Einzelflächen. **Das plastische Grenzbiegemoment wird schließlich aus der Summe der wirkenden Einzelbiegemomente des Querschnittes gebildet.**

Bestimmung der resultierenden Zug- und Druckkräfte:

wirkende Normalkräfte $N_i = \sigma_{R,d} * A_i$	Abstand zur Nulllinie
$Z1 = N1 = 21,82\text{KNcm}^2 * 40\text{cm}^2 = 873\text{KN}$	$e_1 = 12,67\text{cm}$
$Z2 = N2 = 21,82\text{Nmm}^2 * 17,5\text{cm}^2 = 382\text{KN}$	$e_2 = 5,83\text{cm}$
$D1 = N3 = 21,82\text{Nmm}^2 * 42,5\text{cm}^2 = 927\text{KN}$	$e_3 = 14,17\text{cm}$
$D2 = N4 = 21,82\text{Nmm}^2 * 15\text{cm}^2 = 327\text{KN}$	$e_4 = 28,38\text{cm}$

Berechnung des plastischen Grenzbiegemomentes:

$$M_{pl,y,d} = N1 * e1 + N2 * e2 + N3 * e3 + N4 * e4$$

$$M_{pl,y,d} = 873 * 12,67 + 382 * 5,83 + 927 * 14,17 + 327 * 28,38$$

$$M_{pl,y,d} = 35703,82 \text{ KNcm}$$

$$\underline{M_{pl,y,d} = 357 \text{ KNm}}$$

Für das plastische Grenzbiegemoment gilt:

$$M_{pl,y,d} = W_{pl,y} * \sigma_{R,d} \quad (1.7)$$

Das plastische Widerstandsmoment W_{pl} ist die Summe der Flächenmomente 1. Grades oberhalb und unterhalb der Flächenhalbierenden.

Nachweis Elastisch- Plastisch :

Für den Nachweis Elastisch-Plastisch gilt:

Der Bemessungswert der Beanspruchungen muss kleiner bzw. gleich den Bemessungswert der Beanspruchbarkeiten des Querschnittes entsprechen.

$$\underline{M_d \leq M_{pl,d}} \quad \underline{\frac{M_d}{M_{pl,d}} \leq 1} \quad (1.8)$$

Der plastische Formbeiwert:

Die Zunahme des plastischen Grenzbiegemomentes gegenüber dem elastischen Grenzbiegemoment wird durch den plastischen Formbeiwert α_{pl} ausgedrückt.

$$\alpha_{pl} = \frac{W_{pl}}{W_{el}} \quad (1.9)$$

Plastischer Formbeiwert bei Walzprofilen:

Für Walzprofile nach DIN 1025-2 erhält man einen plastischen Formbeiwert von:

$$\frac{1,10 < \alpha_{pl,y} < 1,18}{\alpha_{pl,y} \cong 1,14}$$

Die Mehrausnutzung zum elastischen Grenzbiegemoment beträgt hier rund 14%. Dies ist im Gegensatz zum Rechteckquerschnitt sehr gering. Diese Profile besitzen jedoch bei minimalem Materialaufwand ein optimales Flächenmoment 2. Grades [4].

Der plastische Formbeiwert bei Rechteckquerschnitten beträgt:

$$\underline{\alpha_{pl} = 1,5}$$

2 Approximation des Spannungs- Dehnungs- Diagrammes

Abbildung 2-1 zeigt ein idealisiertes, für den Baustahl S235 im Zugversuch ermitteltes Spannungs-Dehnungs-Diagramm.

Für die folgenden Berechnungen werden hieraus verschiedene Werkstoffgesetze abgeleitet.

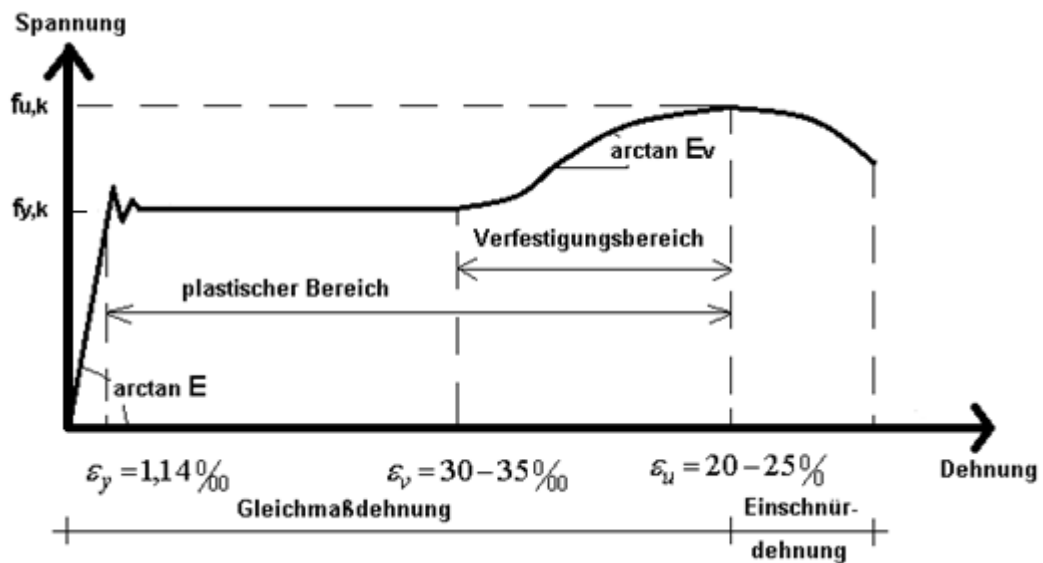


Abbildung 2-1 Spannungs- Dehnungs- Diagramm für den Baustahl S235 [5]

Werkstoffkennwerte der folgenden Berechnungen:

Für die Berechnungen in dieser Arbeit werden die charakteristischen Festigkeiten für Walzstahl nach DIN 18800 angenommen.

Für Erzeugnisdicken $t \leq 40\text{mm}$ und der Stahlsorte S235 gilt:

-Streckgrenze: $f_{y,k} = 240\text{N/mm}^2$

-Zugfestigkeit: $f_{u,k} = 360\text{N/mm}^2$

-Bruchdehnung: $A = 20 \text{ bis } 25\%$

Bezeichnung des neu berechneten Biegemomentes:

Die Berechnungen der folgenden Untersuchungen werden für das in Abbildung 2-1 dargestellte Spannungs-Dehnungs-Diagramm des Baustahls S235 geführt. Dabei wird der Bereich bis zum Ende der Gleichmaßdehnung mit $\varepsilon_u = 20\%$ angenommen.

Die Dehnung entspricht der Zugfestigkeit: $f_{u,k} = 240 \text{ N} / \text{mm}^2$.

Das berechnete Biegemoment wird wie folgt bezeichnet:

$$\underline{M_{pl,neu} = M_{pl,\varepsilon_u} = M_{pl,20}}$$

2.1 Bildung der Werkstoffgesetze

Um den empirisch gewonnenen Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen aus den experimentellen Versuchen in Berechnungen nutzen zu können, müssen diese durch mathematische Beziehungen angenähert werden. Im Folgenden werden die in dieser Arbeit zur Beschreibung des Spannungs-Dehnungs-Verhaltens des Baustahles S235 nach Abbildung 2-1, gebildeten Werkstoffgesetze vorgestellt.

2.1.1 Lineare- Näherungen des Werkstoffverhaltens

Für die Approximation des in Abbildung 2-1 dargestellten Spannungs-Dehnungs-Diagrammes werden die folgenden Werkstoffgesetze für eine Lineare Näherung verwendet.

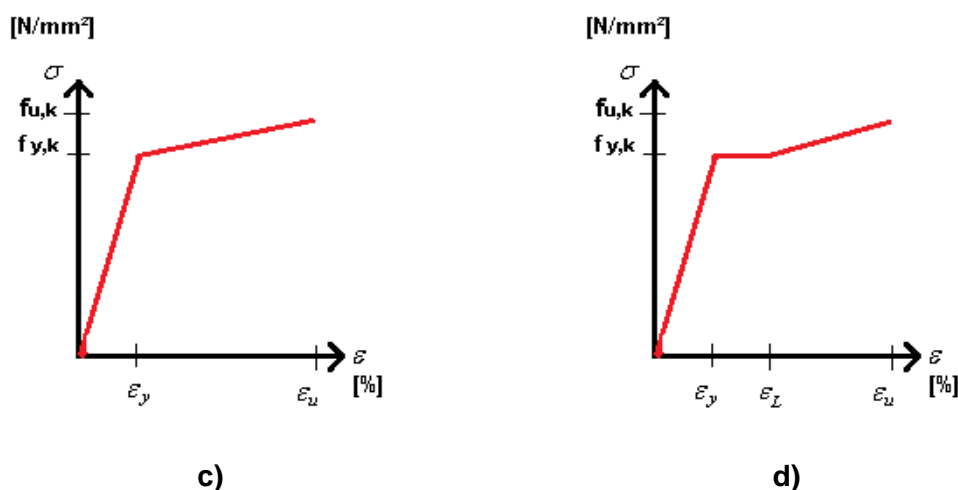


Abbildung 2-2 Lineare Näherungen der Werkstoffverhaltens

- c) Bilineare Approximation mit Verfestigung
- d) Trilineare Approximation mit Lüdersdehnung

Die Bilineare Näherung verläuft linear bis zur Streckgrenze und anschließend linear verfestigend. Hierbei wird der Bereich der Lüdersdehnung vernachlässigt.

Im Werkstoffgesetz nach Abbildung 2-2 d) sind sowohl der elastische Bereich mit der Hookeschen-Geraden, der Bereich der Lüdersdehnung als auch der zweite Verfestigungsbereich enthalten.

Mit der Näherung nach Abbildung 2-2 d) wird das Werkstoffverhalten nach Abbildung 2-1 besonders gut beschrieben. Die Berechnungen werden zeigen, inwieweit der Bereich der Lüders-Dehnung Einfluss auf Ergebnis nimmt.

2.1.2 Nichtlineare- Näherungen des Werkstoffverhaltens

Zur Beschreibung des Werkstoffverhaltens werden auch nichtlineare Näherungen verwendet. In der Umformtechnik beispielsweise werden zur Beschreibung der Fließfunktion eines Werkstoffes Potenzfunktionen verwendet. Die Funktionen enthalten Konstanten, die das Werkstoffverhalten beschreiben. Diese ermöglichen eine gute Anpassungsfähigkeit der Funktion an das jeweilige Werkstoffverhalten des Materials. Die Ermittlung erfolgt aus den experimentell ermittelten Werten des einachsigen Zugversuches.

Abbildung 2-3 zeigt zwei Werkstoffgesetze mit einer nichtlinearen Näherung des Materialverhaltens.

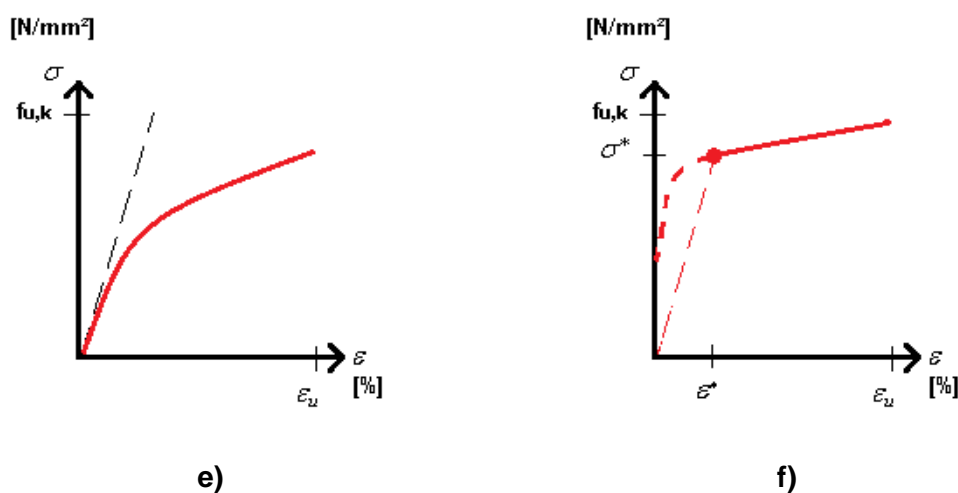


Abbildung 2-3 Nichtlineare Näherungen des Werkstoffverhaltens

- e) Potenz-Approximation nach Ramberg-Osgood
- f) Potenz-Approximation nach Ludwik

Approximation nach Ramberg-Osgood:

Die Näherung nach Ramberg-Osgood ist in der Abbildung 2-3 e) dargestellt. Sie beginnt im Ursprung des Diagrammes und beschreibt das elastische und plastische Werkstoffverhalten. Die allgemeine Gleichung lautet:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon^*} = \frac{\sigma}{\sigma^*} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma^*} \right)^n \quad \text{für } \alpha > 0 \text{ und } n \geq 1 \quad (2.1)$$

$$\text{mit } \sigma^* = R_F \operatorname{sgn} \varepsilon \text{ und } \varepsilon^* = \sigma^* / E$$

Der erste Term der Gleichung beschreibt den elastischen Anteil der Dehnungen. Im zweiten Term wird das plastische Verhalten, die Fließfunktion beschrieben [6].

In der Literatur wird häufig folgende Schreibweise verwendet:

$$\sigma = C * \varepsilon^{1/n} \quad (2.2)$$

Die Spannungen werden als Funktion der Dehnungen betrachtet. Hierbei sind C und n werkstoffabhängige Konstanten, die an das Werkstoffverhalten angepasst werden müssen.

Die Potenz-Approximation nach Ludwik

Eine weitere Möglichkeit, das Spannungs-Dehnungs-Verhalten anhand einer Potenzfunktion zu beschreiben, liefert die Approximation nach Ludwik. Die Funktion ist in Abbildung 2-3 f) dargestellt. Sie wird häufig für große plastische Deformationen bei Umformvorgängen und für kubisch flächenzentrierte Werkstoffe ohne ausgeprägte Streckgrenze verwendet [6]. Die allgemeine Form der Funktion lautet:

$$\sigma = A * \varepsilon^k \quad (2.3)$$

A und k sind hierbei werkstoffabhängige Konstanten. Diese Funktion beschreibt nicht das gesamte Spannungs- und Dehnungsverhalten des Werkstoffes, sondern ausschließlich den plastischen Bereich. Für Materialkennlinien mit anfänglich linearelastischem Verhalten wird die Funktion häufig durch eine lineare Funktion ergänzt.

$$\sigma = \sigma_0 + K_L * \varepsilon^{n_L} \quad (2.4)$$

2.2 Berechnungen am Rechteck

Die Werkstoffgesetze aus 2.1 werden im Folgenden zur Berechnung der Biegemomente an dem in Abbildung 2-4 dargestellten Rechteckquerschnitt angewendet. In der Abbildung sind: Flächenschwerpunkt S, die Hauptachsen y und z und die Querschnittsabmessungen dargestellt.

2.2.1 Idealelastisches Werkstoffverhalten

Der elastische Bereich im idealelastischen Werkstoffgesetz nach Abbildung 1-1 b) lässt sich mathematisch durch eine Geradengleichung beschreiben. Der Anstieg entspricht dem Elastizitätsmodul.

In Abbildung 2-4 ist der Verlauf der Spannungen und Dehnungen bei elastischer Beanspruchung über die Querschnittshöhe dargestellt.

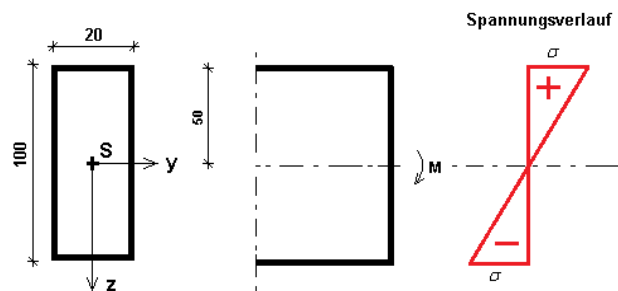


Abbildung 2-4 Elastischer Spannungsverlauf am Rechteck

Die Spannungen und Dehnungen wachsen proportional von der Nulllinie an. Für die Längen und Spannungsänderungen über den Querschnitt gilt:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma} = \frac{1}{z} \quad (2.5)$$

Dabei σ_1 die Spannung eines Flächenelementes im Abstand 1 und σ der entsprechende Werte der Spannung im Abstand z von der Nulllinie.

Bei doppel- und einfachsymmetrischen Querschnitten bezüglich der y-Achse beträgt der Abstand zur Nulllinie jeweils die halbe Querschnittshöhe. Die Funktion der Spannung für diesen Querschnitt bei Beanspruchung der Randfasern bis zur Fließgrenze lautet:

$$\sigma_{el}(z) = \frac{\sigma_F}{h/2} * z \quad (2.6)$$

mit $\sigma_F = 240 \frac{N}{mm^2}$ und $\frac{h}{2} = 50mm$ gilt:

$$\sigma_{el}(z) = \frac{240}{50} * z = 4,8 * z \quad (2.7)$$

Berechnung des elastischen Grenzbiegemomentes M_{el} :

$$M_y = \int_A (\sigma * z) dA \quad (2.8)$$

mit $\sigma_{el}(z)$

$$M_y = \int_A (\sigma_{el}(z) * z) dA \quad (2.9)$$

$$M_{y,el} = \int_A (4,8 * z * z) dA$$

$$M_{y,el} = 2 * \left(\int_0^{h/2} 4,8 * z^2 * b dz \right)$$

$$M_{y,el} = 2 * \left(\int_0^{50} 4,8 * z^2 * 20 dz \right) = 40 * 4,8 * \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^{50} = 192 * \left[\frac{50^3}{3} \right] [Nmm]$$

$$\underline{M_{y,el} = 8KNm}$$

2.2.2 Idealplastisches Werkstoffverhalten

Beim idealplastischen Werkstoffverhalten wird jeder Querschnittsfaser die Grenzspannung $\sigma_{R,d}$ bzw. bei der Berechnung mit charakteristischen Werten die Fließspannung $\sigma_F = f_{y,k}$ zugewiesen. Der Verlauf der Spannungen ist in Abbildung 2-5 dargestellt.

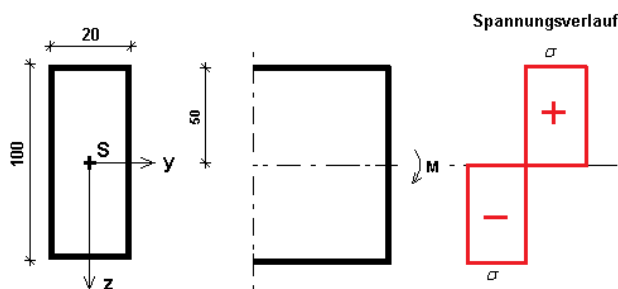


Abbildung 2-5 QS mit Spannungsverlauf Idealplastisch

Funktion der plastischen Spannung:

$$\sigma_{pl}(z) = \sigma_F \quad (2.10)$$

mit $\sigma_F = 240 \frac{N}{mm^2}$ gilt:

$$\underline{\sigma_{pl}(z) = 240} \quad (2.11)$$

Berechnung des plastischen Biegemomentes M_{pl} :

$$(2.8) \quad M_y = \int_A (\sigma * z) dA$$

mit $\sigma_{pl}(z)$

$$M_y = \int_A (\sigma_{pl}(z) * z) dA \quad (2.12)$$

$$M_{y,pl} = 2 * \left(\int_0^{h/2} 240 * z * b \right) dz$$

$$M_{y,pl} = 2 * \left(\int_0^{50} 240 * z * 20 \right) dz$$

$$M_{y,pl} = 40 * 240 * \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{50} = 9600 * \left(\left[\frac{50^2}{2} \right] \right) [Nmm]$$

$$\underline{M_{y,pl} = 12KNm}$$

2.2.3 Bilineare Approximation mit linearem Verfestigungsverlauf

Die bilineare Approximation mit Verfestigung nach Abbildung 2-2 c) wird häufig auch als „Idealelastisch-plastisch mit konstantem Verfestigungsverlauf“ bezeichnet. Das Werkstoffverhalten ist gekennzeichnet durch einen elastischen und einen plastischen Querschnittsbereich. In Abbildung 2-6 ist der Verlauf der Spannungen im Zugbereich des Querschnittes sowie der Verlauf der Dehnungen dargestellt.

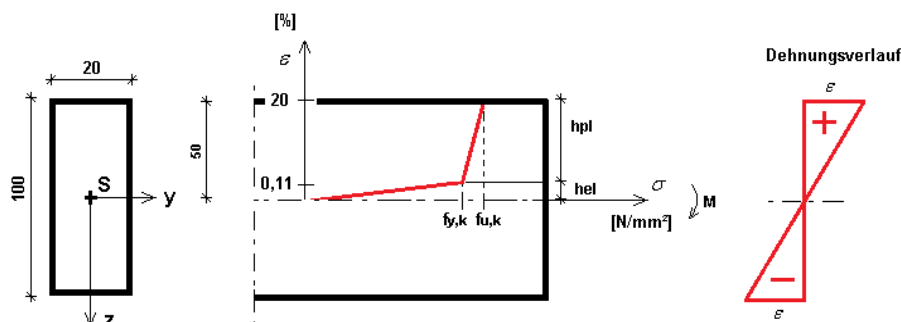


Abbildung 2-6 QS mit Dehnung und bilinearen Spannungsverlauf

Bestimmung der Querschnittsbereiche:

Die Bestimmung der elastischen und der plastischen Querschnittshöhe erfolgt über den linearen Verlauf der Dehnung über die Querschnittshöhe. Für das bilineare Werkstoffverhalten ergeben sich bei einer Randdehnung von $\varepsilon_u = 20\%$ die folgenden Querschnittsbereiche. Im elastischen Bereich gilt:

$$\sigma = E * \varepsilon \quad (2.13)$$

$$\text{mit } \sigma = f_{y,k} = 240 N/mm^2 \text{ und } E = 210000 N/mm^2$$

$$\varepsilon = \varepsilon_F = \frac{240}{210000} [-] \quad (2.14)$$

$$\underline{\varepsilon_F = 1,14 * 10^{-3} \simeq 0,11\%}$$

Höhe des elastischen Bereiches h_{el} :

$$\frac{h_{(el)}}{\varepsilon_F} = \frac{h/2}{\varepsilon_u} \quad h_{(el)} = \frac{1,14 * 10^{-3} * 50}{0,2} = 0,29mm \quad (2.15)$$

Höhe des plastischen Bereiches h_{pl} :

$$h_{pl} = h/2 - h_{el} \quad h_{(pl)} = \frac{100}{2} - 0,286 = 49,71mm \quad (2.16)$$

Berechnung des elastischen Biegemomentes M_{el} :

Die Berechnung des elastischen Biegemomentes wird analog der Berechnung des elastischen Werkstoffverhaltens geführt. Die Funktionsgleichung der Spannung im elastischen Querschnittsbereich beträgt:

$$\sigma_{el}(z) = \frac{\sigma_F}{h_{(el)}} * z \quad (2.17)$$

$$\text{mit } \sigma = 240 \frac{N}{mm^2} \text{ und } h_{(el)} = 0,29mm$$

$$\sigma_{el}(z) = \frac{\sigma_F}{h_{el}} * z = \frac{240}{0,29} = 840 * z \quad (2.18)$$

Berechnung des plastischen Biegemomentes M_{pl} :

$$(2.9) \quad M_y = \int_A (\sigma_{el}(z) * z) dA$$

$$M_{y,el} = 2 * \left(\int_0^{0,286} 840 * z^2 * b \right) dz$$

$$M_{y,el} = 2 * \left(\int_0^{0,286} 840 * z^2 * 20 \right) dz = 33600 * \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^{0,286} \quad [Nmm]$$

$$\underline{M_{y,el} = 261,22 Nmm}$$

Bestimmung der plastischen Spannungsfunktion:

Ebenso wie für den elastischen Querschnittsbereich wird der Verlauf der Spannungen im plastischen Querschnittsbereich mittels einer linearen Funktion $\sigma_{pl}(z)$ beschrieben.

Die Funktionsgleichung der Spannung im plastischen Bereich kann mit:

$$\sigma_{pl}(z) = m\sigma + n \quad (2.19)$$

beschrieben werden. Hierbei wird nach Abbildung 2-6 wird der Anstieg m aus der Differenz von Zugfestigkeit und Streckgrenze zur Höhe des plastischen Bereiches bestimmt. Es gilt:

$$\sigma_{pl}(z) = \frac{f_{u,k} - f_{y,k}}{h_{pl}} * z + n \quad (2.20)$$

mit: $f_{u,k} = 360 \frac{N}{mm^2}$; $f_{y,k} = 240 \frac{N}{mm^2}$ und $h_{pl} = 49,71mm$

$$\sigma_{pl}(z) = \frac{360 - 240}{49,71} * z + n = 2,41 * z + n$$

Der Schnittpunkt der Funktion mit der Spannungsachse nach Abbildung 2-6 kann durch das Einsetzen der bekannten Spannung der Zugfestigkeit und der Querschnittshöhe in die Funktionsgleichung bestimmt werden:

$$\begin{aligned} 360 &= 2,41 * 50 + n \\ n &= 239,31 \end{aligned}$$

$$\underline{\sigma_{pl}(z) = 2,41 * z + 239,31} \quad (2.21)$$

Berechnung des plastischen Biegemomentes M_{pl} :

$$(2.12) \quad M_y = \int_A (\sigma_{pl}(z) * z) dA$$

$$M_{y,pl} = 2 * \left(\int_{0,29}^{50} \sigma_{pl} * z * b \right) dz = 2 * \left(\int_{0,29}^{50} (2,41 * z + 239,31) * z * 20 \right) dz$$

$$M_{y,pl} = 40 * \left[\frac{2,41 * z^3}{3} + \frac{239,31 * z^2}{2} \right]_{0,29}^{50} [Nmm]$$

$$\underline{M_{y,pl} = 15,99 KNm}$$

Berechnung des Gesamtbiegemomentes:

Das Gesamtbiegemoment berechnet sich aus der Summe des elastischen und des plastischen Biegemomentes. Um Verwechslungen mit der idealplastischen Berechnung zu vermeiden wird das entsprechend dem Spannungs-Dehnungs-Verlauf berechnete Grenzbiegemoment mit dem für die Berechnung verwendeten Dehnungswert in % bezeichnet.

$$M_{y,pl,20} = M_{el} + M_{pl}$$

$$M_{y,pl,20} = 261,22 * 10^{-6} + 15,99 [KNm]$$

$$\underline{M_{y,pl,20} = 16 KNm}$$

2.2.4 Trilineare Approximation mit Lüdersdehnung

Der Bereich der Lüders-Dehnung wird nach Abbildung 2-1 mit einer Dehnung von 30‰ angenommen. In Abbildung 2-7 ist der Spannungsverlauf im Zugbereich und der Dehnungsverlauf dargestellt.

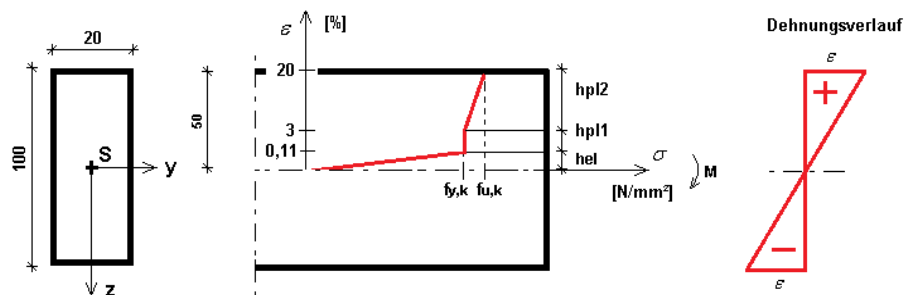


Abbildung 2-7 QS mit Dehnung und trilinearen Spannungsverlauf

Bestimmung der Querschnittsbereiche:

Das Werkstoffgesetz ist in Abbildung 2-8 mit den angenommenen Dehnungsbereichen dargestellt. Der Winkel β beschreibt hierbei den Anstieg der Verfestigungsgeraden.

Es ergeben sich drei Querschnittsbereiche:

- Elastischer Bereich I, h_{el}
- Der plastische Bereich II, h_{pl1}
- Der plastische Bereich III, h_{pl2}

$$\alpha = \tan^{-1} * E$$

$$\beta = \tan^{-1} * E_v = \tan^{-1} (\Delta \sigma / \Delta \varepsilon)$$

$$\alpha = \tan^{-1} (210000) = 1,57$$

$$\beta = \tan^{-1} (120 / (0,2 - 0,03)) = 1,57$$

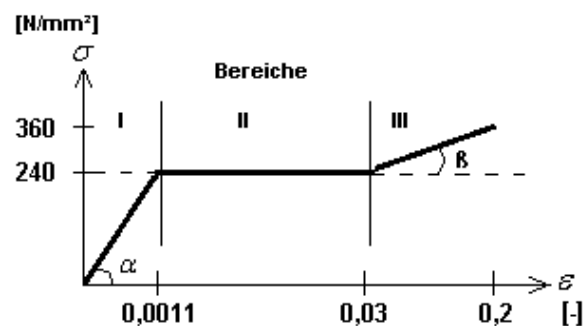


Abbildung 2-8 Werkstoffverhalten mit Lüdersdehnung

Entsprechend der angenommenen Dehnungen ergeben sich folgende elastische und plastische Querschnittsbereiche.

Bereich I:

$$(2.15) \quad \frac{h_{(el)}}{\varepsilon_F} = \frac{h/2}{\varepsilon_u} \quad h_{(el)} = \frac{1,14 \cdot 10^{-3} \cdot 50}{0,2} = 0,29 \text{ mm}$$

Bereich II:

$$\frac{h_{pl1}}{\varepsilon_I} = \frac{(h/2 - h_{el})}{\varepsilon_u} \quad h_{pl1} = \frac{30 \cdot 10^{-3} \cdot (50 - 0,286)}{0,2} = 7,46 \text{ mm} \quad (2.22)$$

Bereich III:

$$h_{pl2} = h/2 - h_{pl1} - h_{el} \quad h_{pl2} = 50 - 7,457 - 0,286 = 42,26 \text{ mm} \quad (2.23)$$

Funktion der elastischen Spannung:

$$(2.17) \quad \sigma_{el}(z) = \frac{\sigma_F}{h_{(el)}} \cdot z$$

mit $\sigma = 240 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ und $h_{(el)} = 0,29 \text{ mm}$

$$(2.18) \quad \sigma_{el}(z) = \frac{240}{0,29} = 840 \cdot z$$

Berechnung des elastischen Biegemomentes M_{el} :

$$(2.9) \quad M_y = \int_A (\sigma_{el}(z) \cdot z) dA$$

$$M_{y,el} = 2 * \left(\int_0^{0,286} 840 * z^2 * b \right)$$

$$M_{y,el} = 2 * \left(\int_0^{0,286} 840 * z^2 * 20 \right) dz = 33600 * \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^{0,286} [Nmm]$$

$$\underline{M_{y,el} = 261,22 Nmm}$$

Funktion der Spannung im plastischen Bereich I:

Für den plastischen Bereich hpl1 ergibt sich entsprechend der Abbildung 2-8 eine konstant bleibende Spannung, hier gilt die Spannungsfunktion des idealplastischen Werkstoffverhaltens.

Es gilt:

$$(2.10) \quad \sigma_{pl}(z) = \sigma_F$$

$$\text{mit } \sigma_F = 240 \frac{N}{mm^2} \text{ gilt:}$$

$$(2.11) \quad \underline{\sigma_{pl}(z) = 240}$$

Berechnung des plastischen Biegemomentes $M_{pl(I)}$:

$$(2.12) \quad M_y = \int_A (\sigma_{pl}(z) * z) dA$$

$$M_{y,pl1} = 2 * \left(\int_{0,29}^{7,46} \sigma_{pl}(z) * z * b \right) dz$$

$$M_{y,pl1} = 2 * \left(\int_{0,29}^{7,46} 240 * z * 20 \right) dz$$

$$M_{y,pl1} = 9600 * \left[\frac{z^2}{2} \right]_{0,29}^{7,46} [Nmm]$$

$$\underline{M_{y,pl1} = 0,27 KNm}$$

Funktion der Spannung im plastischen Bereiches II:

Für den plastischen Bereich der Verfestigung gilt wie im Bilinearen-Werkstoffverhalten folgende Funktion:

nach (2.19)
$$\sigma_{pl}(z) = m\sigma + n$$

Hierbei unterscheiden sich der Anstieg m und die Verschiebung n vom bilinearen Werkstoffverhalten entsprechend der unterschiedlichen Bereiche.

Die Funktion der Spannung im Verfestigungsbereich beträgt:

nach (2.20)
$$\sigma_{pl}(z) = \frac{f_{u,k} - f_{y,k}}{h_{pl}} * z + n$$

mit: $f_{u,k} = 360 \frac{N}{mm^2}$; $f_{y,k} = 240 \frac{N}{mm^2}$ und $h_{pl,2} = 42,62mm$

$$\sigma_{pl}(z) = \frac{360 - 240}{49,26} * z + n = 2,84 * z + n$$

Bestimmung der Verschiebung n :

$$360 = 2,84 * 50 + n$$

$$n = 218$$

$$\underline{\sigma_{pl}(z) = 2,84 * z + 218} \quad (2.24)$$

Berechnung des plastischen Biegemomentes $M_{pl(II)}$:

(2.12)
$$M_y = \int_A (\sigma_{pl}(z) * z) dA$$

$$M_{y,pl2} = 2 * \left(\int_{7,46}^{50} \sigma_{pl,2} * z * b \right) dz = 2 * \left(\int_{7,46}^{50} (2,84 * z + 218) * z * 20 \right) dz$$

$$M_{y,pl2} = 40 * \left[\frac{2,84 * z^3}{3} + \frac{218 * z^2}{2} \right]_{7,46}^{50} [Nmm]$$

$$\underline{M_{y,pl2} = 15,37 KNm}$$

Berechnung des Gesamtbiegemomentes:

$$M_{y,pl,20} = M_{el} + M_{pl1} + M_{pl2}$$

$$M_{y,pl,20} = 261,22 * 10^{-6} + 0,27 + 15,37 \text{ [KNm]}$$

$$\underline{M_{y,pl,20} = 15,90 \text{ KNm}}$$

2.2.5 Potenz- Approximation nach Ramberg-OsgoodBestimmung der Werkstoffkonstanten:

Die Werkstoffkonstanten werden durch drei Stützpunkte aus dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm ermittelt. Für die Berechnung wird ein Programm zur Fließkurvenbestimmung verwendet (aus [8]).

$$P1(\varepsilon_1 / \sigma_1) = (1 * 10^{-3} / 210); P2(\varepsilon_2 / \sigma_2) = (1,9 * 10^{-3} / 250); P3(\varepsilon_3 / \sigma_3) = (0,2 / 360)$$

Konstanten nach Ramberg-Osgood:

- $C = 398,13$ und $n = 15,58$

$$(2.2) \quad \sigma = C * \varepsilon^{1/n}$$

mit $C = 398,13$ und $n = 15,58$:

$$\sigma = 398,13 * \varepsilon^{1/15,58} \quad (2.25)$$

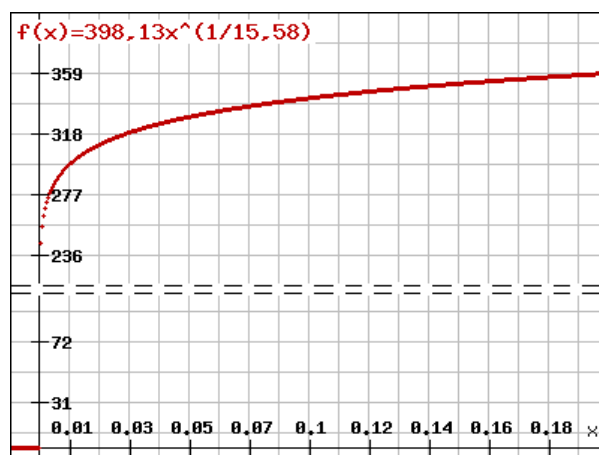


Abbildung 2-9 Funktion nach Ramberg-Osgood

Querschnitt und Spannungsverlauf nach Ramberg-Osgood:

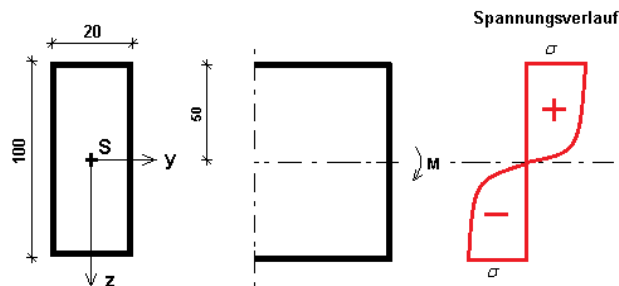
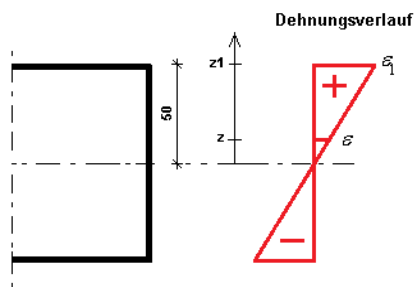


Abbildung 2-10 Spannungsverlauf nach Ramberg-Osgood

Funktion der Spannung:

Die Spannungsverteilung über den Querschnitt wird über das Verhältnis der Dehnungen zur Querschnittshöhe bestimmt.



$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = \frac{z_1}{z} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\varepsilon_1 * z}{z_1} \quad (2.26)$$

Durch das Einsetzen von (2.26) in die Funktionsgleichung (2.25) ergibt die Funktion der Spannungen über die Querschnittshöhe.

$$\sigma_{pl}(z) = 398 * \left(\frac{\varepsilon_1 * z}{z_1} \right)^{\frac{1}{15,58}} \quad (2.27)$$

Für die maximale Randdehnung von 20% und eine Höhe von 50mm ergibt die Funktion:

$$\sigma_{pl}(z) = 398 * \left(\frac{0,2 * z}{50} \right)^{\frac{1}{15,58}} \quad (2.28)$$

Berechnung des Gesamtbiegemomentes:

$$(2.12) \quad M_y = \int_A (\sigma_{pl}(z) * z) dA$$

$$M_{y,pl} = \int_0^z (\sigma(z) * z * b) dz$$

$$M_{y,pl,20} = 2 * \int_0^{50} \left(398,13 * \left(\frac{0,2 * z}{50} \right)^{(1/15,58)} * 20 * z \right) dz \quad [Nmm]$$

$$\underline{M_{y,pl,20} = 17,39 KNm}$$

2.2.6 Potenz- Approximation nach LudwikBestimmung der Werkstoffkonstanten:

Die Werkstoffkonstanten werden durch drei Stützpunkte aus dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm ermittelt. Für die Berechnung wird ein Programm zur Fließkurvenbestimmung verwendet (aus [8]).

$$P1(\varepsilon_1 / \sigma_1) = (1 * 10^{-3} / 210); \quad P2(\varepsilon_2 / \sigma_2) = (1,9 * 10^{-3} / 250); \quad P3(\varepsilon_3 / \sigma_3) = (0,2 / 360)$$

Konstanten nach Ludwik:

- $K_L = 226,12$ und $n_L = 0,247$

$$(2.4) \quad \sigma = \sigma_1 + K_L * \varepsilon^{n_L}$$

mit: $K_L = 226,12$ und $n_L = 0,247$:

$$\sigma = 210 + 226,12 * \varepsilon^{0,247} \quad (2.29)$$

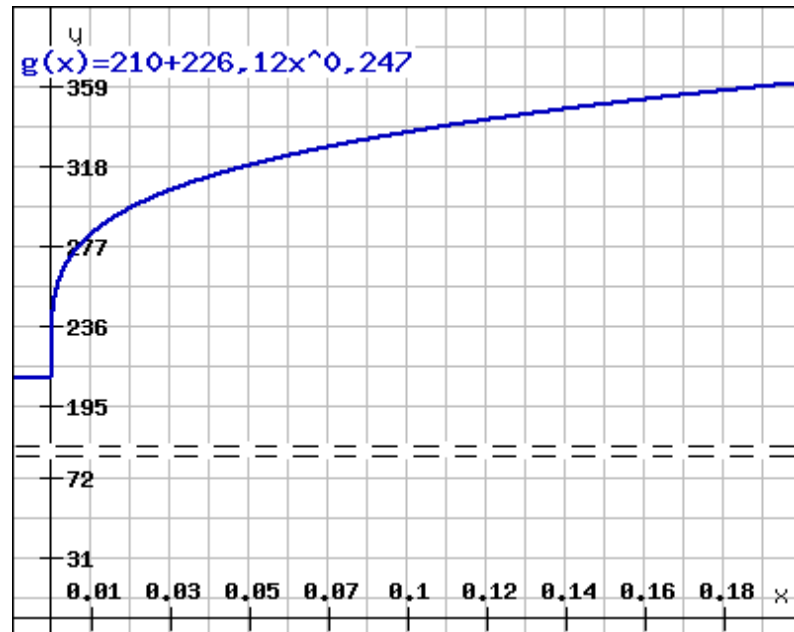
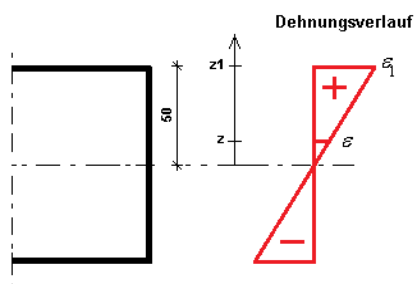
Funktionsgraph nach Ludwik:

Abbildung 2-11 Funktion nach Ludwik

Funktion der Spannung:

Die Spannung an einer beliebigen Stelle des Querschnittes wird über das Verhältnis der Dehnungen zum Abstand zur Nulllinie bestimmt.



$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = \frac{z_1}{z} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\varepsilon_1 * z}{z_1} \quad (2.26)$$

Das Einsetzen von (2.26) in die Funktionsgleichung (2.28) ergibt die Spannungsfunktion über die Querschnittshöhe.

$$\sigma = 210 + 226,12 * \left(\frac{\varepsilon_1 * z}{z_1} \right)^{0,247} \quad (2.30)$$

Für die maximale Randdehnung von 20% und einer Höhe von 50mm ergibt sich die Funktion:

$$\sigma_{pl}(z) = 210 + 226,12 * \left(\frac{\varepsilon * 0,2}{50} \right)^{0,247} \quad (2.31)$$

Berechnung des Gesamtbiegemomentes:

$$(2.12) \quad M_y = \int_A (\sigma_{pl}(z) * z) dA$$

$$M_{y,pl} = \int_0^z (\sigma(z) * z * b) dz$$

$$M_{y,pl,20} = 2 * \int_0^{50} \left(\left(210 + 226,12 * \left(\frac{0,2 * z}{50} \right)^{0,247} \right) * 20 * z \right) dz \quad [Nmm]$$

$$\underline{M_{y,pl,20} = 17,26KNm}$$

2.2.7 Übersicht und Auswertung der Berechnungen am Rechteck

Im Folgenden werden die Berechnungen am Rechteck zusammenfassend tabellarisch und grafisch dargestellt.

Tabelle 2 Ergebnisse der Berechnungen am Rechteck

	Werkstoffgesetz	Grenzbiegemoment
a)	Idealelastisch	$M_{y,el} = 8 \text{ KNm}$
b)	Idealplastisch	$M_{y,pl} = 12 \text{ KNm}$
c)	Bilinear	$M_{y,pl,20} = 16 \text{ KNm}$
d)	Trilinear	$M_{y,pl,20} = 15,90 \text{ KNm}$
e)	Ramberg- Osgood	$M_{y,pl,20} = 17,39 \text{ KNm}$
f)	Ludwik	$M_{y,pl,20} = 17,26 \text{ KNm}$

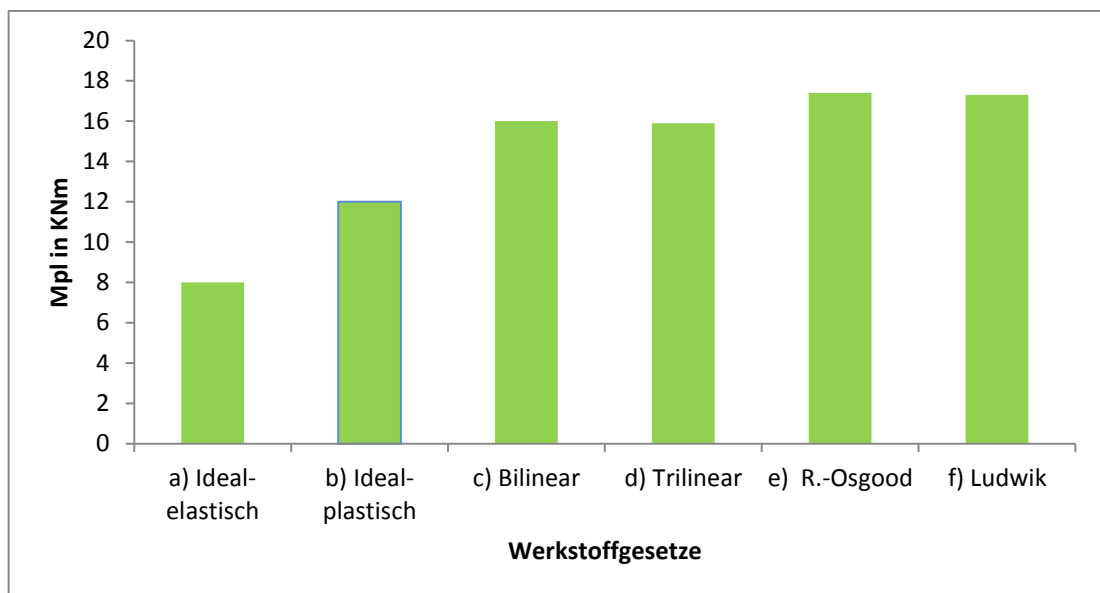


Diagramm 1 Auswertung der Berechnungen am Rechteck-QS

2.3 Berechnungen am Doppel-T Querschnitt

In den folgenden Berechnungen werden die Näherungen der Spannungs-Dehnungs-Kurve auf das Doppel-T-Profil angewendet. Hierbei wird ein Profil gewählt, welches den gleichen Abstand Randfaser-Spannungsnulllinie aufweist wie das vorangegangene Berechnungsbeispiel am Rechteck. Die linearen und nichtlinearen Funktionen der Spannungen über die Querschnittshöhe bzw. die elastischen und plastischen Querschnittsbereiche der Werkstoffgesetze bleiben dadurch unverändert. In den folgenden Berechnungsbeispielen werden diese Ergebnisse genutzt und auf die ausführlichen Berechnungen am Rechteck verwiesen.

Die Leistungsfähigkeit eines Querschnittes hängt wesentlich davon ab, wie er geformt ist und bezüglich der Krafteinwirkung angeordnet ist [7]. Das Doppel-T-Profil hat dabei ein optimales Flächenmoment bei minimalem Materialverbrauch. Hierbei leisten hauptsächlich die Gurte den Beitrag zum Flächenmoment. Damit ein Querschnitt plastiziert, ohne vorher zu versagen, braucht er genügend Flächenelemente in den maximal beanspruchten Stellen, um die wirkenden Spannungen aufzunehmen. Die Wahl des Querschnittes fiel daher auf die HEB-Profil-Reihe.

wähle: - - **HEB100** nach DIN 1025-2

Zur Vereinfachung der Berechnungen wurde das Profil hinsichtlich seiner Abmessungen idealisiert. Die Querschnittsanteile der Ausrundungen wurden dabei anteilig dem Steg und Gurten zugewiesen, so dass das ursprüngliche Flächenmoment um die Biegeachse erhalten bleibt. In Abbildung 2-12 ist der idealisierte Querschnitt mit den Abmessungen dargestellt.

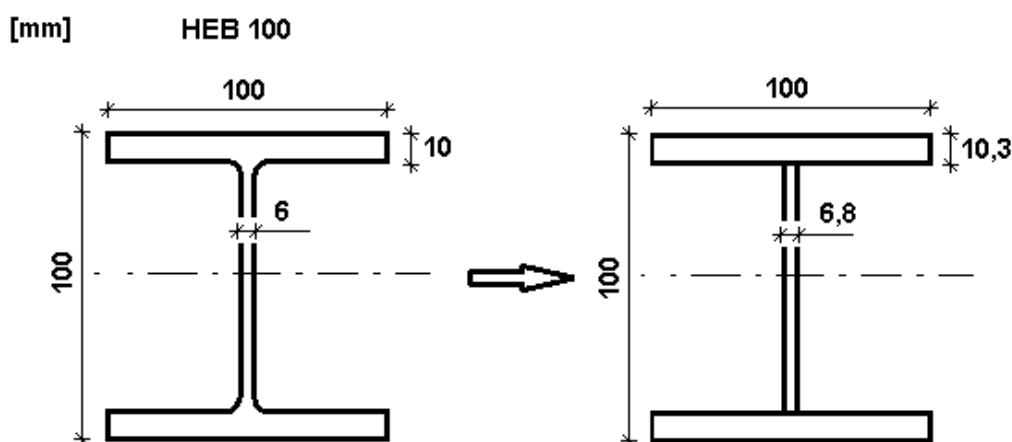


Abbildung 2-12 HEB100 Querschnitt idealisiert

Die Querschnittswerte sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengefasst.

HEB 100 nach DIN 1025-2 (10.63)		Idealisiertes Profil
Profilmaße:		Profilmaße:
h	100 mm	100 mm
b	100 mm	100 mm
s	6 mm	6,8 mm
t	10 mm	10,3 mm
r	12 mm	-
Statische Werte:		Statische Werte:
A	26 cm ²	26 cm ²
I_y	450 cm ⁴	448,3 cm ⁴
I_z	167 cm ⁴	171,67 cm ⁴

Abbildung 2-13 Querschnittswerte HEB100 idealisiert

2.3.1 Idealelastisches Werkstoffverhalten

Abbildung 2-14 ist der durch das Biegemoment M beanspruchte Doppel-T-Querschnitt dargestellt. In der Abbildung sind die schwere Achse, der Schwerpunkt S und der Verlauf der Spannungen und Dehnungen bei elastischer Beanspruchung bis zur elastischen Grenzspannung dargestellt.

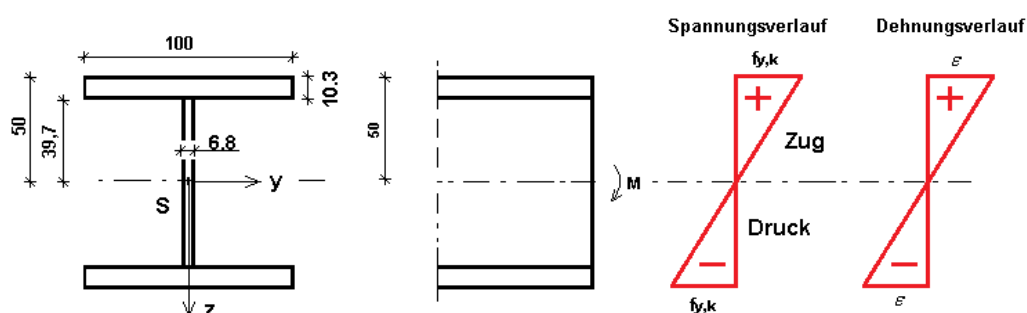


Abbildung 2-14 QS mit Dehnungs-und Spannungsverlauf Idealelastisch

Funktion der elastischen Spannung:

$$(2.6) \quad \sigma_{el}(z) = \frac{\sigma_F}{h/2} * z$$

$$\text{mit } \sigma_F = 240 \frac{N}{mm^2} \text{ und } \frac{h}{2} = 50mm$$

$$(2.7) \quad \sigma_{el}(z) = \frac{240}{50} * z = 4,8 * z$$

Berechnung des elastischen Grenzbiegemomentes M_{el} :

$$(2.8) \quad M_y = \int_A (\sigma * z) dA$$

mit $\sigma_{el}(z)$

$$(2.9) \quad M_y = \int_A (\sigma_{el}(z) * z) dA$$

Die Integration erfolgt hierbei jeweils für die Flächenelemente des Steges sowie der Gurtbereiche.

$$\begin{aligned}
 M_{y,el} &= 2 * \left(\int_0^{h/2-t} (4,8 * z * s * z) dz + \int_{h/2-t}^{h/2} (4,8 * z * b * z) dz \right) \\
 M_{y,el} &= 2 * \left(\int_0^{39,7} (4,8 * 6,8 * z^2) dz + \int_{39,7}^{50} (4,8 * 100 * z^2) dz \right) \\
 M_{y,el} &= 2 * \left(6,8 * 4,8 * \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^{39,7} + 100 * 4,8 * \left[\frac{z^3}{3} \right]_{39,7}^{50} \right) [Nmm] \\
 \underline{M_{y,el} &= 21,34KNm}
 \end{aligned}$$

2.3.2 Idealplastisches Werkstoffverhalten

Querschnitt mit Spannungsverlauf Idealplastisch:

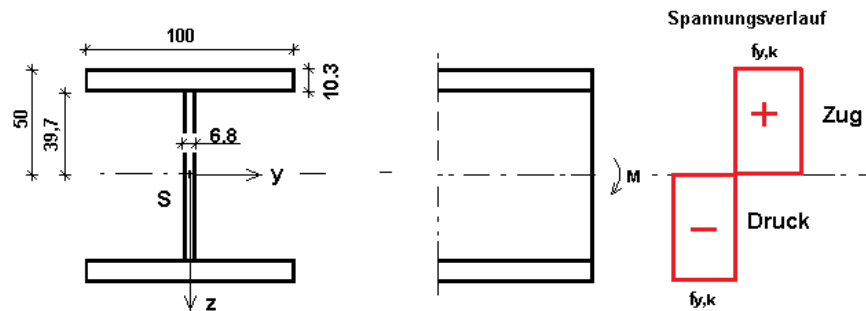


Abbildung 2-15 QS und Spannungsverteilung Idealplastisch

Funktion der plastischen Spannung:

$$(2.10) \quad \sigma_{pl}(z) = \sigma_F$$

mit $\sigma_F = 240 \frac{N}{mm^2}$ gilt:

$$(2.11) \quad \underline{\sigma_{pl}(z) = 240}$$

Berechnung des plastischen Biegemomentes M_{pl} :

$$(2.8) \quad M_y = \int_A (\sigma * z) dA$$

mit $\sigma_{pl}(z)$

$$(2.12) \quad M_y = \int_A (\sigma_{pl}(z) * z) dA$$

$$M_y = \int_A (\sigma_{pl}(z) * z) dA$$

$$M_{y,pl} = 2 \left(\int_0^{h/2-t} (\sigma_{pl}(z) * s * z) dz + \int_{h/2-t}^{h/2} (\sigma_{pl}(z) * b * z) dz \right)$$

$$M_{y,pl} = 2 * \left(\int_0^{39,7} (240 * z * 6,8) dz + \int_{39,7}^{50} (240 * z * 100) dz \right)$$

$$M_{y,pl} = 2 * \left(240 * 6,8 * \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{39,7} + 240 * 100 * \left[\frac{z^2}{2} \right]_{39,7}^{50} \right) [Nmm]$$

$$\underline{M_{y,pl} = 24,75 KNm}$$

2.3.3 Bilineare Approximation mit linearem Verfestigungsverlauf

Querschnitt mit Dehnungs-und bilinearem Spannungsverlauf:

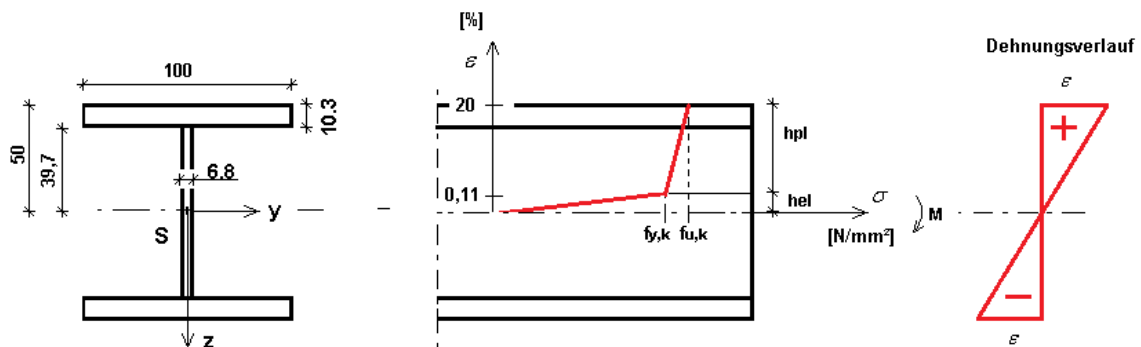


Abbildung 2-16 QS mit Dehnungs-und bilinearem Spannungsverlauf

Bestimmung der Querschnittsbereiche:

Die Berechnung der Querschnittsbereiche sowie der Funktionsgleichung der Spannung wurde in 2.2.3 beschrieben.

Höhe des elastischen Bereiches h_{el} :

$$(2.15) \quad \frac{h_{(el)}}{\varepsilon_F} = \frac{h/2}{\varepsilon_u} \quad h_{(el)} = \frac{1,14 \cdot 10^{-3} \cdot 50}{0,2} = 0,29 \text{ mm}$$

Höhe des plastischen Bereiches h_{pl} :

$$(2.16) \quad h_{pl} = h/2 - h_{el} \quad h_{(pl)} = \frac{100}{2} - 0,286 = 49,71 \text{ mm}$$

Funktion der elastischen Spannung:

$$(2.17) \quad \sigma_{el}(z) = \frac{\sigma_F}{h_{(el)}} \cdot z$$

mit $\sigma_F = 240 \frac{N}{\text{mm}^2}$ und $h_{(el)} = 0,29 \text{ mm}$ folgt:

$$(2.18) \quad \sigma_{el}(z) = \frac{240}{0,29} = 840 \cdot z$$

Berechnung des elastischen Biegemomentes M_{el} :

$$(2.9) \quad M_y = \int_A (\sigma_{el}(z) \cdot z) dA$$

$$M_{y,el} = 2 \cdot \int_0^{0,29} (840 \cdot z \cdot s \cdot z) dz$$

$$M_{y,el} = 2 \cdot \left(\int_0^{0,29} ((840 \cdot z) \cdot 6,8 \cdot z) dz \right) = 11424 \cdot \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^{0,29} \quad [\text{Nmm}]$$

$$\underline{M_{y,el} = 88,82 \text{ Nmm}}$$

Funktion der plastischen Spannung:

Die Spannungsfunktion des plastischen Bereiches für das bilineare Werkstoffverhalten wurde in 2.2.3 bestimmt. Für den plastischen Bereich gilt:

$$(2.21) \quad \sigma_{pl}(z) = 2,414 * z + 239,310$$

Berechnung des plastischen Biegemomentes M_{pl} :

$$(2.12) \quad M_y = \int_A (\sigma_{pl}(z) * z) dA$$

$$M_y = \int_A (\sigma_{pl}(z) * z) dA$$

$$M_{y,pl} = 2 \left(\int_0^{h/2-t} (\sigma(z) * s * z) dz + \int_{h-t}^{h/2} (\sigma(z) * b * z) dz \right)$$

$$M_{y,pl,20} = 2 * \left(\int_{0,29}^{39,7} (2,414 * z + 239,310) * z * 6,8 dz + \int_{39,7}^{50} (2,414 * z + 239,310) * z * 100 dz \right)$$

$$M_{y,pl,20} = 2 * \left(\left(6,8 * \left[\frac{2,414 * z^3}{3} + \frac{239,310 * z^2}{2} \right]_{0,29}^{39,7} \right) + \left(100 * \left[\frac{2,414 * z^3}{3} + \frac{239,310 * z^2}{2} \right]_{39,7}^{50} \right) \right) [Nmm]$$

$$\underline{M_{y,pl,20} = 35,41KNm}$$

Berechnung des Gesamtbiegemomentes:

$$M_{y,pl,20} = M_{el} + M_{pl}$$

$$M_{y,pl,20} = 88,16 * 10^{-6} + 35,41 [KNm]$$

$$\underline{M_{y,pl,20} = 35,41KNm}$$

2.3.4 Trilineare Approximation mit Lüdersdehnung

Querschnitt mit Dehnungs-und trilinearem Spannungsverlauf:

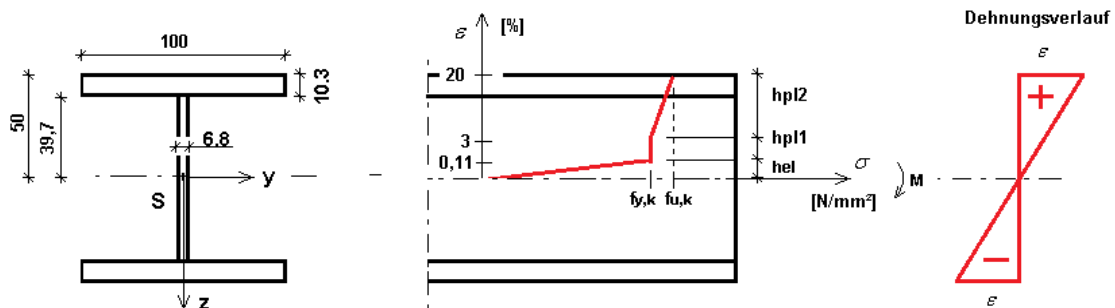


Abbildung 2-17 Trilineares Werkstoffverhalten mit Lüdersdehnung

Höhe des elastischen Bereiches h_{el} :

$$(2.15) \quad \frac{h_{(el)}}{\varepsilon_F} = \frac{h/2}{\varepsilon_u} \quad h_{(el)} = \frac{1,14 \cdot 10^{-3} \cdot 50}{0,2} = 0,29 \text{ mm}$$

Funktion der elastischen Spannung:

Die Bestimmung der Spannung im elastischen Bereich erfolgt nach:

$$(2.18) \quad \sigma_{el}(z) = \frac{\sigma_F}{h_{el}} \cdot z = \frac{240}{0,29} \cdot z = 840 \cdot z$$

Berechnung des elastischen Biegemomentes M_{el}

$$(2.9) \quad M_y = \int_A (\sigma_{el}(z) \cdot z) dA$$

$$M_{y,el} = 2 \cdot \int_0^{0,286} (840 \cdot z \cdot s \cdot z) dz$$

$$M_{y,el} = 2 \cdot \left(\int_0^{0,286} 840 \cdot z^2 \cdot 6,8 \right) dz = 11424 \cdot \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^{0,286} \quad [Nmm]$$

$$\underline{M_{y,el} = 88,82 Nmm}$$

Höhe des plastischen Bereiches hpl1:

Die Berechnung der Querschnittsbereiche sowie der Funktionsgleichung der Spannung wurde in 2.2.4 geführt.

$$(2.22) \quad \frac{h_{pl1}}{\varepsilon_I} = \frac{(h/2 - h_{el})}{\varepsilon_u} \quad h_{pl1} = \frac{30 \cdot 10^{-3} \cdot (50 - 0,286)}{0,2} = 7,46 \text{ mm}$$

Funktion der plastischen Spannung im hpl1:

$$(2.10) \quad \sigma_{pl}(z) = \sigma_F$$

mit $\sigma_F = 240 \frac{N}{\text{mm}^2}$ gilt:

$$(2.11) \quad \underline{\sigma_{pl}(z) = 240}$$

Berechnung der plastischen Biegemomentes Mpl(I):

$$(2.12) \quad M_y = \int_A (\sigma_{pl}(z) \cdot z) dA$$

$$M_{y,pl1} = 2 \cdot \left(\int_{h_{el}}^{h_{LII}} \sigma_{pl}(z) \cdot z \cdot s \right) dz = 2 \cdot \left(\int_{0,286}^{7,457} 240 \cdot z \cdot 6,8 \right) dz$$

$$M_{y,pl1} = 3264 \cdot \left[\frac{z^2}{2} \right]_{0,286}^{7,457} \quad [\text{Nmm}]$$

$$\underline{M_{y,pl1} = 90620,63 \text{ Nmm}}$$

Höhe des plastischen Bereiches hpl2:

$$(2.23) \quad h_{pl2} = h/2 - h_{pl1} - h_{el} \quad h_{pl2} = 50 - 7,457 - 0,286 = 42,257 \text{ mm}$$

Funktion der plastischen Spannung im Bereich hpl2:

Die Berechnung der Querschnittsbereiche sowie der Funktionsgleichung der Spannung wurde in 2.2.4 geführt.

$$(2.24) \quad \underline{\sigma_{pl}(z) = 2,84 * z + 218}$$

Berechnung der plastischen Biegemomentes Mpl(II):

$$(2.12) \quad M_y = \int_A (\sigma_{pl}(z) * z) dA$$

$$M_{y,pl2} = 2 * \left(\int_{h_{Li}}^{h/2-t} \sigma_{pl}(z) * z * s \, dz + \int_{h/2-t}^{h/2} \sigma_{pl}(z) * z * b \, dz \right)$$

$$M_{y,pl2} = 2 * \left(\int_{7,46}^{39,7} (2,84 * z + 218) * z * 6,8 \, dz + \int_{39,7}^{50} (2,84 * z + 218) * z * 100 \, dz \right)$$

$$M_{y,pl2} = 2 * \left(\left(6,8 * \left[\frac{2,84 * z^3}{3} + \frac{218 * z^2}{2} \right]_{7,76}^{39,7} \right) + \left(100 * \left[\frac{2,84 * z^3}{3} + \frac{218 * z^2}{2} \right]_{39,7}^{50} \right) \right)$$

$$\underline{M_{y,pl2} = 35 KNm}$$

Berechnung des Gesamtbiegemomentes:

$$M_{y,pl,20} = M_{el} + M_{pl_1} + M_{pl_2}$$

$$M_{y,pl,20} = 88,16 * 10^{-6} + 9,06 * 10^{-2} + 35 [KNm]$$

$$\underline{M_{y,pl,20} = 35,11 KNm}$$

2.3.5 Potenz- Approximation nach Ramberg-Osgood

In Abbildung 2-18 ist der Querschnitt und der Spannungsverlauf nach Ramberg-Osgood dargestellt.

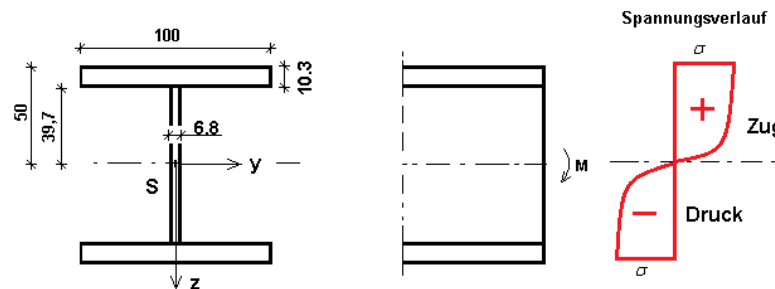
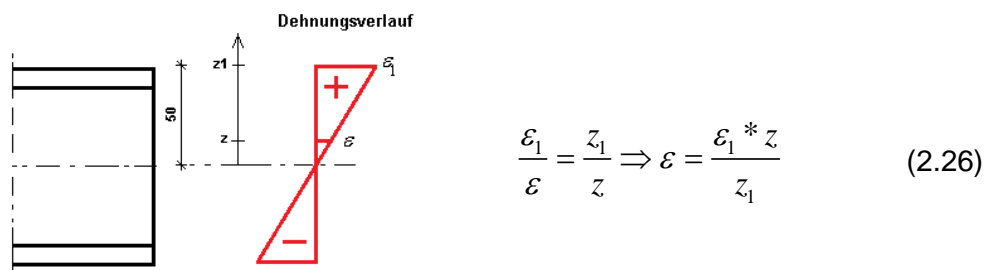


Abbildung 2-18 QS und Spannungsverlauf nach Ramberg-Osgood

Funktion der Spannung:

Die Spannungsermittlung in Abhängigkeit der Querschnittshöhe wird im nichtlinearen Bereich über das Verhältnis der Dehnungen zum Abstand der Flächenhalbierenden gebildet.



Die Gleichung nach Ramberg-Osgood wurde in 2.2.5 ermittelt. Die Funktionsgleichung der Spannung über die Querschnittshöhe für die maximale Randdehnung von 20% und einem Abstand zur Nulllinie von 50mm beträgt:

$$(2.27) \quad \sigma_{pl}(z) = 398 * \left(\frac{\varepsilon_1 * z}{z_1} \right)^{\frac{1}{15,58}}$$

mit $\varepsilon_1 = 0,2$ und $z_1 = 50\text{mm}$

$$(2.28) \quad \sigma_{pl}(z) = 398 * \left(\frac{0,2 * z}{50} \right)^{\frac{1}{15,58}}$$

Berechnung des plastischen Biegemomentes:

$$(2.12) \quad M_y = \int_A (\sigma_{pl}(z) * z) dA$$

Die Integration erfolgt jeweils für den Steg- und Gurtbereich.

$$M_{y,pl} = 2 * \left(\left(\int \sigma_{(z)} * z * s \right) dz + \left(\int \sigma_{(z)} * z * b \right) dz \right)$$

$$M_{y,pl,20} = 2 * \left(\int_0^{39,7} \left(398,13 * \left(\frac{0,2 * z}{50} \right)^{(1/15,58)} * 6,8 * z \right) dz + \int_{39,7}^{50} \left(398,13 * \left(\frac{0,2 * z}{50} \right)^{(1/15,58)} * 100 * z \right) dz \right) [Nmm]$$

$$\underline{M_{y,pl,20} = 36,62 KNm}$$

2.3.6 Potenz- Approximation nach Ludwik

Funktion der Spannung:

Die Funktionsgleichung nach Ludwik wurde in 2.2.6 ermittelt.

$$(2.29) \quad \sigma = 210 + 226,12 * \varepsilon^{0,247}$$

Querschnitt und Spannungsverlauf nach Ludwik:

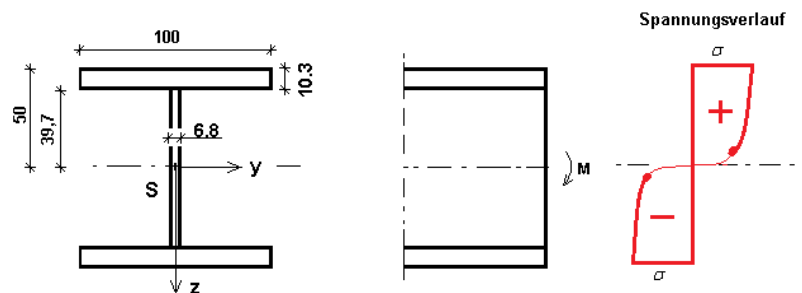
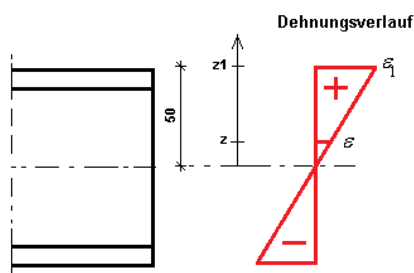


Abbildung 2-19 Querschnitt und Spannungsverlauf nach Ludwik

Funktion der Spannung:

Die Spannung an einer beliebigen Stelle des Querschnittes wird über das Verhältnis der Dehnungen zum Abstand zur Nulllinie bestimmt.



$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon} = \frac{z_1}{z} \Rightarrow \epsilon = \frac{\epsilon_1 * z}{z_1} \quad (2.26)$$

$$(2.30) \quad \sigma = 210 + 226,12 * \left(\frac{\epsilon_1 * z}{z_1} \right)^{0,247}$$

mit $\epsilon_1 = 0,2$ und $z_1 = 50mm$

$$(2.31) \quad \sigma_{pl}(z) = 210 + 226,12 * \left(\frac{\epsilon * 0,2}{50} \right)^{0,247}$$

Berechnung des plastischen Biegemomentes M_{pl} :

$$(2.12) \quad M_y = \int_A (\sigma_{pl}(z) * z) dA$$

Die Integration wird jeweils für den Steg- und Gurtbereich geführt.

$$M_{y,pl} = 2 * \left(\left(\int \sigma_{(z)} * z * s \right) dz + \left(\int \sigma_{(z)} * z * b \right) dz \right)$$

$$M_{y,pl,20} = 2 * \left(\left(\int_0^{39,7} 210 + 226,12 * \left(\frac{0,2 * z}{50} \right)^{(0,247)} * 6,8 * z \right) dz + \left(\int_{39,7}^{50} 210 + 226,12 * \left(\frac{0,2 * z}{50} \right)^{(0,247)} * 100 * z \right) dz \right) [Nmm]$$

$$\underline{M_{y,pl,20} = 36,70 KNm}$$

2.3.7 Übersicht und Auswertung

Im Folgenden werden die Berechnungen am Doppel-T-Querschnitt zusammenfassend tabellarisch und grafisch dargestellt.

Tabelle 3 Ergebnisse der Berechnungen am Doppel-T-Querschnitt

	Werkstoffgesetz	Grenzbiegemoment
a)	Idealelastisch	$M_{y,el} = 21,34 \text{ KNm}$
b)	Idealplastisch	$M_{y,pl} = 24,75 \text{ KNm}$
c)	Bilinear	$M_{y,pl,20} = 35,41 \text{ KNm}$
d)	Trilinear	$M_{y,pl,20} = 35,11 \text{ KNm}$
e)	Ramberg- Osgood	$M_{y,pl,20} = 36,62 \text{ KNm}$
f)	Ludwik	$M_{y,pl,20} = 36,70 \text{ KNm}$

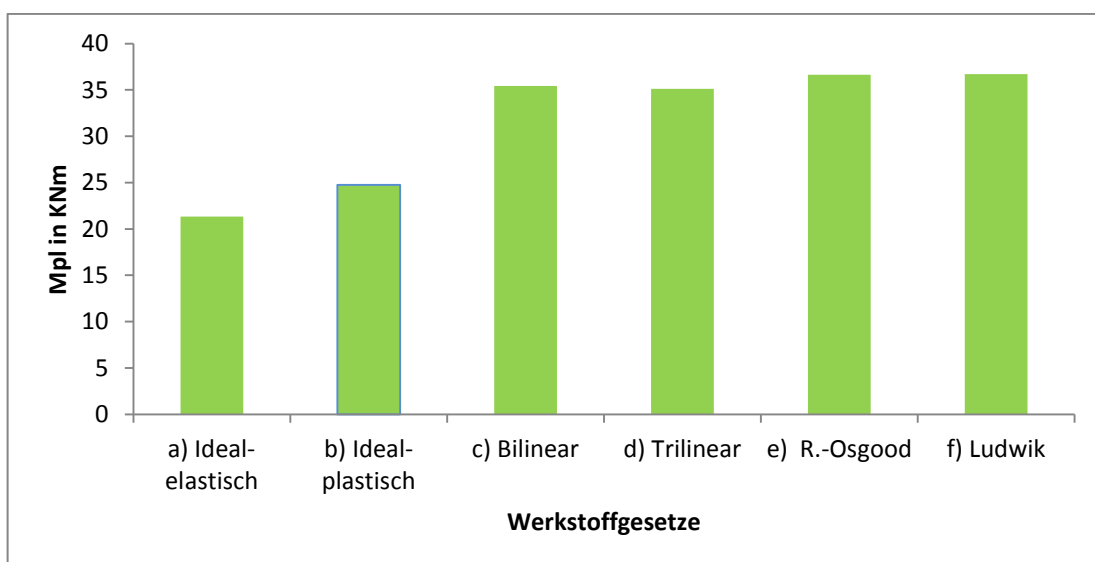


Diagramm 2 Auswertung der Berechnungen am Doppel-T-Querschnitt

2.4 Berechnungen am Doppel-T und Biegung um z

Nachfolgend soll die Berechnung für das idealisierte HEB-Profil bei Biegung um die schwache Achse erfolgen. Die Berechnung erfolgt für:

- Idealplastisches Werkstoffgesetz,
- Bilineares Werkstoffgesetz
- Ramberg-Osgood

2.4.1 Idealplastisches Werkstoffverhalten

Querschnitt und Spannungsverlauf Idealplastisch:

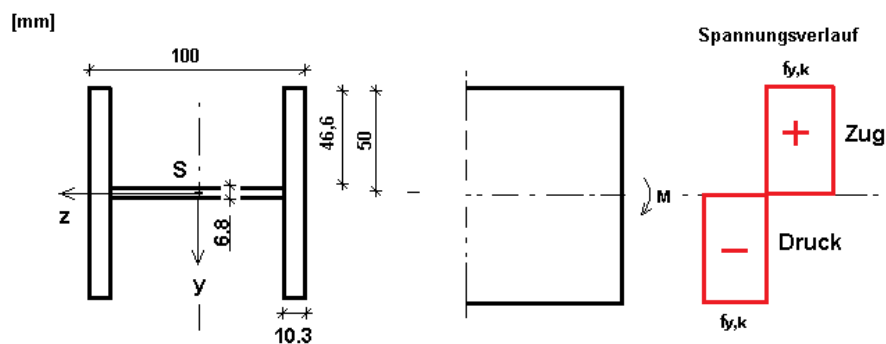


Abbildung 2-20 Querschnitt und Spannungsverlauf Idealplastisch Biegung

Funktion der plastischen Spannung:

$$(2.10) \quad \sigma_{pl}(y) = \sigma_F$$

mit $\sigma_F = 240 \frac{N}{mm^2}$ gilt:

$$(2.11) \quad \underline{\sigma_{pl}(y) = 240}$$

Berechnung des plastischen Biegemomentes M_{pl} :

Bei der Berechnung des plastischen Biegemomentes erfolgt die Integration über die halbe Höhe des Steges sowie jeweils für beide Gurtflächen.

$$M_z = \int_A (\sigma(y) * y) dA \quad (2.32)$$

$$M_{z,pl} = 2 \left(\left(\int_0^{s/2} \sigma_{pl}(y) * b * y \right) dy + \left(\int_{s/2}^{h/2} \sigma_{pl}(y) * t * y \right) dy + \left(\int_{s/2}^{h/2} \sigma_{pl}(y) * t * y \right) dy \right)$$

$$M_{z,pl} = 2 * \left(\left(\int_0^{3,4} 240 * y * 100 \right) dy + \left(\int_{3,4}^{50} 240 * y * 10,3 \right) dy + \left(\int_{3,4}^{50} 240 * y * 10,3 \right) dy \right)$$

$$M_{z,pl} = 2 * 240 * \left(100 * \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{3,4} + 10,3 * \left[\frac{y^2}{2} \right]_{3,4}^{50} + 10,3 * \left[\frac{y^2}{2} \right]_{3,4}^{50} \right) [Nmm]$$

$$\underline{M_{z,pl} = 12,58 KNm}$$

2.4.2 Bilineare ApproximationQuerschnitt mit Dehnungs-und bilinearem Spannungsverlauf:

Für die bilineare Näherung ergeben sich ein elastischer und ein plastischer Querschnittsbereich:

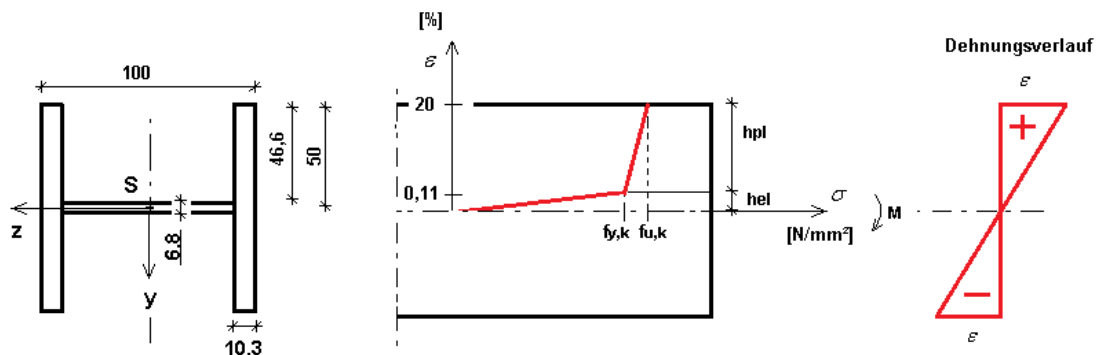


Abbildung 2-21 QS mit Dehnungs-und bilinearem Spannungsverlauf

Höhe des elastischen Bereiches h_{el} :

(Die Berechnung der Querschnittsbereiche wurde in 2.2.3 berechnet.)

$$(2.15) \quad \frac{h_{(el)}}{\varepsilon_F} = \frac{h/2}{\varepsilon_u} \quad h_{(el)} = \frac{1,14 * 10^{-3} * 50}{0,2} = 0,29mm$$

Funktion der elastischen Spannung:

$$(2.17) \quad \sigma_{el}(y) = \frac{\sigma_F}{h_{(el)}} * y$$

$$\sigma_F = 240 \frac{N}{mm^2} \text{ und } h_{el} = 0,29mm$$

$$(2.18) \quad \sigma_{el}(y) = \frac{\sigma_F}{h_{el}} * z = \frac{240}{0,29} = 840 * y$$

Berechnung des elastischen Biegemomentes M_{el} :

$$(2.31) \quad M_z = \int_A (\sigma(y) * y) dA$$

$$M_{el} = \int_A (\sigma_{el} * y) dA$$

$$M_{z,el} = 2 * \left(s * \int_0^{0,29} 840 * y^2 dy \right)$$

$$M_{z,el} = 2 * \left(100 * \left(\int_0^{0,29} 840 * y^2 dy \right) \right) = 168000 * \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^{0,29} [Nmm]$$

$$\underline{M_{z,el} = 1306,12Nmm}$$

Höhe des plastischen Bereiches h_{pl} :

$$(2.16) \quad h_{pl} = h/2 - h_{el} \quad h_{(pl)} = \frac{100}{2} - 0,286 = 49,71 \text{ mm}$$

Funktion der Spannung:

(Die Spannungsfunktion wurde in 2.2.3 berechnet.)

$$(2.21) \quad \sigma_{pl}(y) = 2,414 * y + 239,310$$

Berechnung des plastischen Biegemomentes M_{pl} :

$$(2.31) \quad M_z = \int_A (\sigma(y) * y) dA$$

$$M_{z,pl} = 4 * \left(\int_{0,29}^{50} \sigma_{pl}(y) * z * t \right) dy$$

$$M_{z,pl} = 4 * \left(\int_{0,29}^{50} (2,414 * y + 239,310) * y * 10,3 \right) dy$$

$$M_{z,pl} = 4 * 10,3 * \left[\frac{2,414 * y^3}{3} + \frac{239,310 * y^2}{2} \right]_{0,29}^{50} \quad [Nmm]$$

$$\underline{M_{z,pl} = 16,47 \text{ KNm}}$$

Berechnung des Gesamtbiegemomentes:

$$M_{z,pl,20} = M_{el} + M_{pl}$$

$$M_{z,pl,20} = 1,31 * 10^{-3} + 16,47 \quad [KNm]$$

$$\underline{M_{z,pl,20} = 16,47 \text{ KNm}}$$

2.4.3 Potenz- Approximation nach Ramberg-Osgood

Querschnitt und Spannungsverlauf nach Ramberg-Osgood:

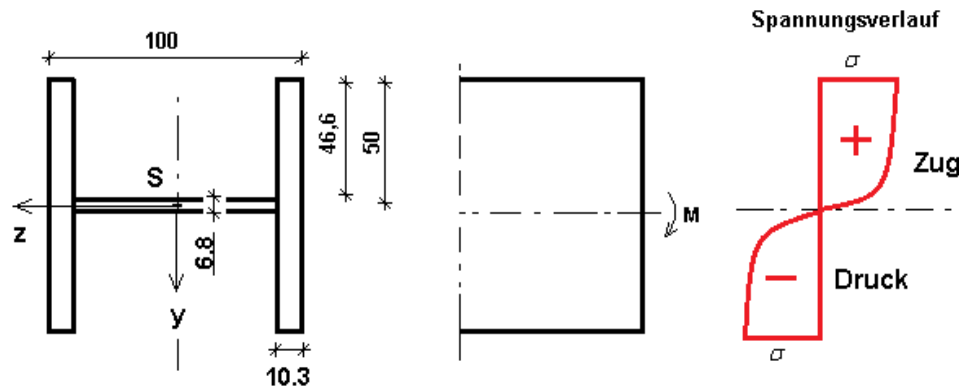


Abbildung 2-22 Querschnitt und Spannungsverlauf nach Ramberg-Osgood

Funktion der Spannung:

(Die Funktion wurde in 2.2.5 ermittelt)

$$(2.27) \quad \sigma_{pl}(y) = 398 * \left(\frac{\varepsilon_1 * y}{y_1} \right)^{\frac{1}{15,58}}$$

mit $\varepsilon_1 = 0,2$ und $y_1 = 50mm$

$$(2.28) \quad \sigma_{pl}(y) = 398 * \left(\frac{0,2 * y}{50} \right)^{\frac{1}{15,58}}$$

Berechnung des Gesamtbiegemomentes:

$$(2.31) \quad M_z = \int_A (\sigma(y) * y) dA$$

Die Integration erfolgt jeweils für den Steg und Gurtbereich. Die Gurte werden zusammengefasst.

$$M_{z,pl} = 2 * \left(\left(\int_0^{3,4} \sigma_{(y)} * y * 100 \right) dy + \left(\int_{3,4}^{50} \sigma_{(y)} * y * 10 \right) dy + \left(\int_{3,4}^{50} \sigma_{(y)} * y * 10 \right) dy \right)$$

$$M_{z,pl,20} = 2 * \left(\int_0^{3,4} \left(398,13 * \left(\frac{0,2 * y}{50} \right)^{(1/15,58)} * 100 * y \right) dy + \int_{3,4}^{50} \left(398,13 * \left(\frac{0,2 * y}{50} \right)^{(1/15,58)} * 20 * y \right) dy \right) [Nmm]$$

$$\underline{M_{z,pl,20} = 17,67 KNm}$$

2.4.4 Übersicht und Auswertung der Berechnungen

Im Folgenden werden die Berechnungen am Doppel-T-Profil bei Biegung um die schwache-Achse zusammenfassend tabellarisch und grafisch dargestellt. Die Tabelle 2 enthält die Ergebnisse der Berechnungen. Zur Bewertung der Werkstoffgesetze wird die Ausnutzung im Vergleich zum idealplastischen Werkstoffgesetz angegeben.

Tabelle 4 Ergebnisse der Berechnungen am Doppel-T-QS bei Biegung um z

	Werkstoffgesetz	Grenzbiegemoment	Ausnutzung
b)	Idealplastisch	$M_{z,pl} = 12,58 \text{ KNm}$	100%
c)	Bilinear	$M_{z,pl,20} = 16,47 \text{ KNm}$	131%
e)	Ramberg - Osgood	$M_{z,pl,20} = 17,67 \text{ KNm}$	140%

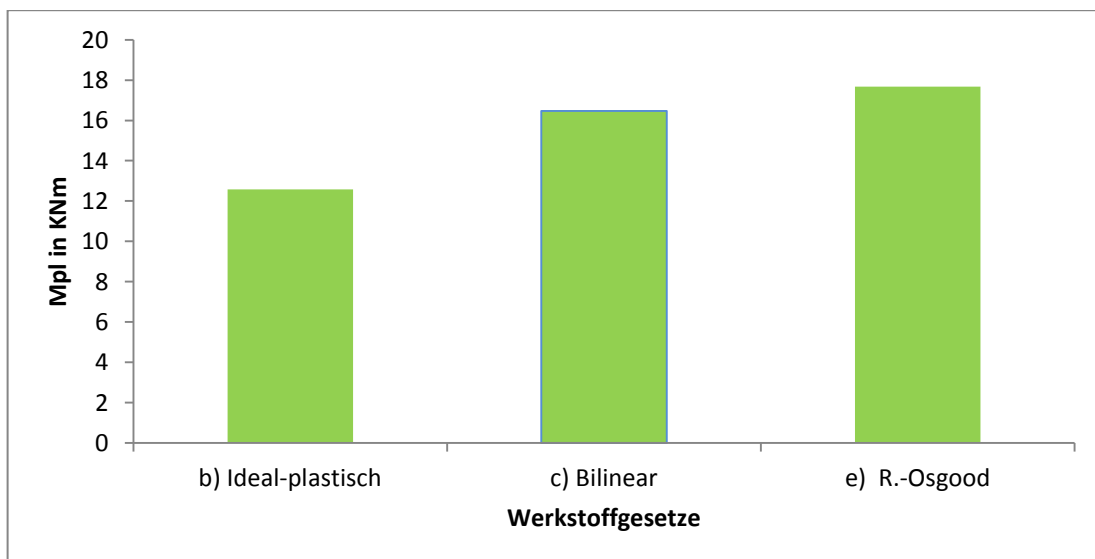


Diagramm 3 | Auswertung der Berechnungen am Doppel-T-QS bei Biegung um z

2.5 Berechnung am U-Querschnitt

Die Werkstoffgesetze werden im Folgenden für einen einfachsymmetrischen Querschnitt der U-Profil- Reihe angewendet.

wähle: **U100** nach DIN1026

Das Profil wird zur Vereinfachung der Berechnungen idealisiert. Abbildung 2-23 zeigt den idealisierten Querschnitt. Die Funktionen der Spannungsverläufe sowie die elastischen und plastischen Querschnittshöhen sind aufgrund gleicher Profilhöhen mit den vorangegangenen Berechnungen identisch. Auf eine ausführliche Erläuterung des Berechnungsablaufs wird daher verzichtet und auf 2.2 verwiesen.

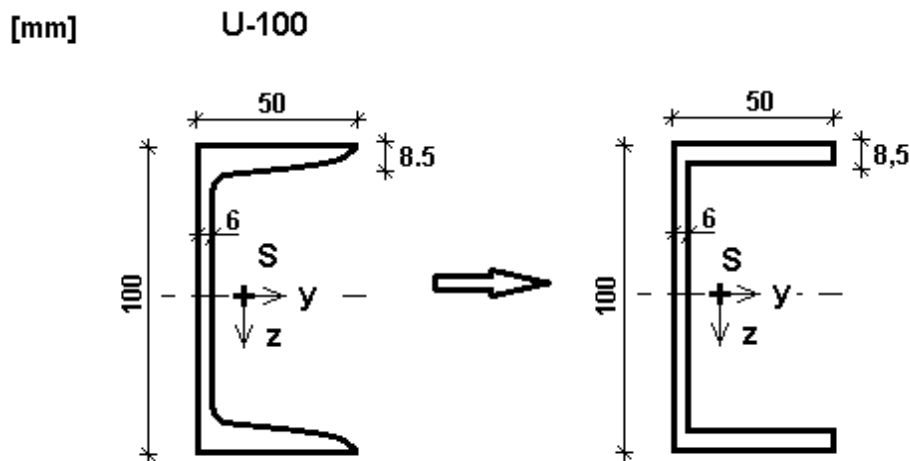


Abbildung 2-23 U-100 idealisiert

In der nachfolgenden Tabelle sind die Querschnittswerte der Profile zusammengefasst.

Tabelle 5 Querschnittswerte U100 idealisiert

U 100 nach DIN 1026		Idealisierte Profil
Profilmaße:		Profilmaße:
h	100mm	100mm
b	50mm	50mm
s	6mm	6mm
t	8,5mm	8,5mm
Statische Werte:		Statische Werte:
A	13,5cm ²	13,5cm ²
I_y	206cm ⁴	207cm ⁴

2.5.1 Idealelastisches Werkstoffverhalten

Querschnitt und Spannungsverlauf Idealelastisch:

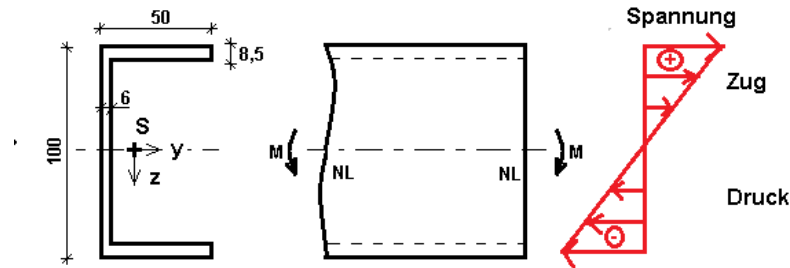


Abbildung 2-24 U-Profil Spannungsverlauf Idealelastisch

Funktion der elastischen Spannung:

$$(2.6) \quad \sigma_{el}(z) = \frac{\sigma_F}{h/2} * z$$

$$\text{mit } \sigma_F = 240 \frac{N}{mm^2} \text{ und } \frac{h}{2} = 50 mm$$

$$(2.7) \quad \sigma_{el}(z) = \frac{240}{50} * z = 4,8 * z$$

Berechnung des elastischen Grenzbiegemomentes M_{el} :

$$(2.9) \quad M_y = \int_A (\sigma_{el}(z) * z) dA$$

$$M_{y,el} = 2 * \left(\int_0^{(h/2-t)} \sigma_{el}(z) * s * z dz + \int_{(h/2-t)}^{(h/2)} \sigma_{el}(z) * b * z dz \right)$$

$$M_{y,el} = 2 * \left(\int_0^{41,5} (4,8 * 6,8 * z^2) * dz + \int_{41,5}^{50} (4,8 * 50 * z^2) dz \right)$$

$$M_{y,el} = 2 * \left(6 * 4,8 * \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^{41,5} + 50 * 4,8 * \left[\frac{z^3}{3} \right]_{41,5}^{50} \right) [Nmm]$$

$$\underline{M_{y,el} = 9,94 KNm}$$

2.5.2 Idealplastisches Werkstoffverhalten

Querschnitt und Spannungsverlauf idealplastisch:

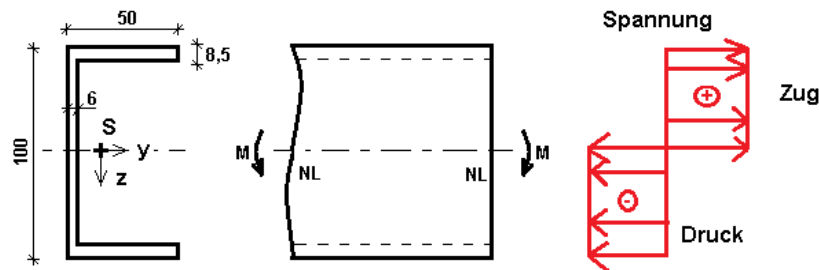


Abbildung 2-25 QS und Spannungsverlauf Idealplastisch

Funktion der plastischen Spannung:

$$(2.10) \quad \sigma_{pl}(z) = \sigma_F$$

mit $\sigma_F = 240 \frac{N}{mm^2}$ gilt:

$$(2.11) \quad \underline{\sigma_{pl}(z) = 240}$$

Berechnung des plastischen Biegemomentes M_{pl} :

$$(2.12) \quad M_y = \int_A (\sigma_{pl}(z) * z) dA$$

$$M_{y,pl} = 2 \left(\int_0^{h/2-t} (\sigma_{pl}(z) * s * z) dz + \int_{h/2-t}^{h/2} (\sigma_{pl}(z) * b * z) dz \right)$$

$$M_{y,pl} = 2 * 240 \left(\int_0^{41,5} (240 * 6 * z) dz + \int_{41,5}^{50} (240 * 50 * z) dz \right)$$

$$M_{y,pl} = 2 * 240 * \left(6 * \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{41,5} + 50 * \left[\frac{z^2}{2} \right]_{41,5}^{50} \right) [Nmm]$$

$$\underline{M_{y,pl} = 11,81 KNm}$$

2.5.3 Bilineare Approximation mit linearem Verfestigungsverlauf

Querschnitt mit Dehnungs-und bilinearem Spannungserlauf:

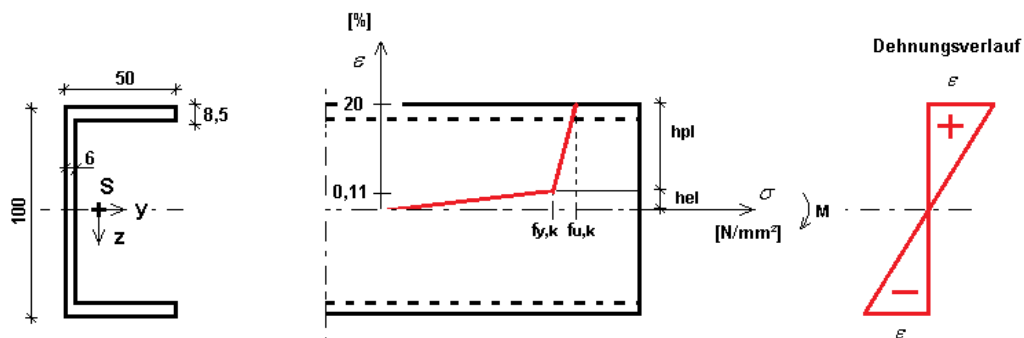


Abbildung 2-26 QS mit Dehnungs-und bilinearem Spannungsverlauf

Höhe des elastischen Bereiches hel:

Die Berechnung der Querschnittsbereiche sowie der Funktionsgleichung der Spannung wurde in 2.2.3 beschrieben.

$$(2.15) \quad \frac{h_{(el)}}{\varepsilon_F} = \frac{h/2}{\varepsilon_u} \quad h_{(el)} = \frac{1,14 * 10^{-3} * 50}{0,2} = 0,29 mm$$

Höhe des plastischen Bereiches h_{pl}

$$(2.16) \quad h_{pl} = h/2 - h_{el} \quad h_{(pl)} = \frac{100}{2} - 0,286 = 49,71 \text{ mm}$$

Funktion der elastischen Spannung:

$$(2.17) \quad \sigma_{el}(z) = \frac{\sigma_F}{h_{(el)}} * z$$

$$\sigma_F = 240 \frac{N}{mm^2} \text{ und } h_{el} = 0,29 \text{ mm}$$

$$(2.18) \quad \sigma_{el}(z) = \frac{\sigma_F}{h_{el}} * z = \frac{240}{0,29} = 840 * z$$

Berechnung des elastischen Biegemomentes M_{el} :

$$(2.9) \quad M_y = \int_A (\sigma_{el}(z) * z) dA$$

$$M_{y,el} = 2 * \left(\int_0^{h_{el}} \sigma_{el}(z) * s * z \right) dz$$

$$M_{y,el} = 2 * \left(\int_0^{0,286} 840 * z^2 * 6 \right) dz = 10080 * \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^{0,286} [Nmm]$$

$$\underline{M_{y,el} = 78,60 Nmm}$$

Funktion der plastischen Spannung im Bereich h_{pl} :

(Die Spannungsfunktion wurde in 2.2.3 bestimmt)

$$(2.21) \quad \sigma_{pl}(z) = 2,41 * z + 239,31$$

Berechnung des plastischen Biegemomentes M_{pl} :

$$(2.12) \quad M_y = \int_A (\sigma_{pl}(z) * z) dA$$

$$M_{y,pl} = 2 * \left(\left(\int_{hel}^{h/2-t} \sigma_{pl}(z) * z * s \right) dz + \left(\int_{h/2-t}^{h/2} \sigma_{pl}(z) * z * b \right) dz \right)$$

$$M_{y,pl,20} = 2 * \left(\left(\int_{0,286}^{41,5} (2,414 * z + 239,310) * z * 6 \right) dz + \left(\int_{41,5}^{50} (2,414 * z + 239,310) * z * 50 \right) dz \right)$$

$$M_{y,pl,20} = 2 * \left(6 * \left[\frac{2,414 * z^3}{3} + \frac{239,310 * z^2}{2} \right]_{0,286}^{41,5} + 50 * \left[\frac{2,414 * z^3}{3} + \frac{239,310 * z^2}{2} \right]_{41,5}^{50} \right) [Nmm]$$

$$\underline{M_{y,pl,20} = 16,78 KNm}$$

Berechnung des Gesamtbiegemomentes:

$$M_{y,pl20} = M_{el} + M_{pl}$$

$$M_{y,pl20} = 7,86 * 10^{-5} + 16,78 [KNm]$$

$$\underline{M_{y,pl20} = 16,78 KNm}$$

2.5.4 Trilineare Approximation mit Lüdersbereich

Querschnitt mit dehnungs-und trilinearen Spannungsverlauf:

In Abbildung 2-27 ist der Dehnungs-und Spannungsverlauf sowie die elastischen und plastischen Querschnittsbereiche dargestellt.

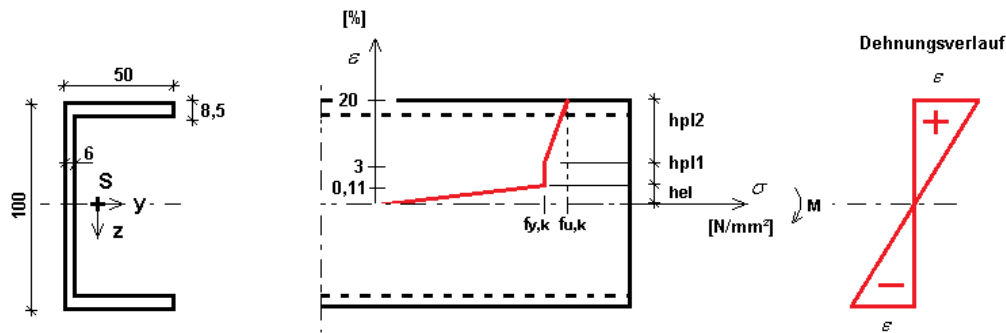


Abbildung 2-27 Trilineares Werkstoffverhalten mit Lüdersdehnung

Höhe des elastischen Bereiches h_{el} :

$$(2.15) \quad \frac{h_{(el)}}{\varepsilon_F} = \frac{h/2}{\varepsilon_u} \quad h_{(el)} = \frac{1,14 \cdot 10^{-3} \cdot 50}{0,2} = 0,29 \text{ mm}$$

Funktion der elastischen Spannung:

$$(2.18) \quad \sigma_{el}(z) = \frac{\sigma_F}{h_{el}} \cdot z = \frac{240}{0,29} \cdot z = 840 \cdot z$$

Berechnung des elastischen Biegemomentes M_{el} :

$$(2.9) \quad M_y = \int_A (\sigma_{el}(z) \cdot z) dA$$

$$M_{y,el} = 2 \cdot \left(\int_0^{h_{el}} \sigma_{el}(z) \cdot s \cdot z \right) dz$$

$$M_{y,el} = 2 \cdot \left(\int_0^{0,286} 840 \cdot z^2 \cdot 6 \right) dz = 10080 \cdot \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^{0,286} \quad [\text{Nmm}]$$

$$\underline{M_{y,el} = 78,60 \text{ Nmm}}$$

Höhe des plastischen Bereiches h_{pl1}:

$$(2.22) \quad \frac{h_{pl1}}{\varepsilon_I} = \frac{(h/2 - h_{el})}{\varepsilon_u} \quad h_{pl1} = \frac{30 \cdot 10^{-3} \cdot (50 - 0,286)}{0,2} = 7,46 \text{ mm}$$

Funktion der plastischen Spannung im Bereich h_{pl1}:

$$(2.10) \quad \sigma_{pl}(z) = \sigma_F$$

$$\text{mit } \sigma_F = 240 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

$$(2.11) \quad \underline{\sigma_{pl}(z) = 240}$$

Berechnung der plastischen Biegemomentes M_{pl(I)}:

$$(2.12) \quad M_y = \int_A (\sigma_{pl}(z) \cdot z) dA$$

$$M_{y,pl1} = 2 \cdot \left(\int_{h_{el}}^{h_{Li}} \sigma_{pl}(z) \cdot z \cdot s \right) dz$$

$$M_{y,pl1} = 2 \cdot \left(\int_{0,29}^{7,46} 240 \cdot z \cdot 6 \right) dz = 2880 \cdot \left[\frac{z^2}{2} \right]_{0,29}^{7,46} [\text{Nmm}]$$

$$\underline{M_{y,pl1} = 79956 \text{ Nmm}}$$

Höhe des plastischen Bereiches h_{pl2}:

$$(2.23) \quad h_{pl2} = h/2 - h_{pl1} - h_{el} \quad h_{pl2} = 50 - 7,457 - 0,286 = 42,26 \text{ mm}$$

Funktion der plastischen Spannung im Bereich hpl2:

$$(2.24) \quad \underline{\sigma_{pl}(z) = 2,84 * z + 218}$$

Berechnung der plastischen Biegemomentes Mpl(II):

$$(2.12) \quad M_y = \int_A (\sigma_{pl}(z) * z) dA$$

$$M_{y,pl} = \int_A (\sigma_{pl}(z) * z) dA$$

$$M_{y,pl2} = 2 * \left(\int_{h_{Li}}^{h/2-t} \sigma_{pl-2} * z * s \, dz + \int_{h/2-t}^{h/2} \sigma_{pl-2} * z * b \, dz \right)$$

$$M_{b,pl2} = 2 * \left(\int_{7,46}^{41,5} (2,84 * z + 218) * z * 6 \, dz + \int_{41,5}^{50} (2,84 * z + 218) * z * 50 \, dz \right)$$

$$M_{b,pl2} = 2 * \left(6 * \left[\frac{2,84 * z^3}{3} + \frac{218 * z^2}{2} \right]_{7,76}^{41,5} + 50 * \left[\frac{2,84 * z^3}{3} + \frac{218 * z^2}{2} \right]_{41,5}^{50} \right) [Nmm]$$

$$\underline{M_{y,pl2} = 16,53 KNm}$$

Berechnung des Gesamtbiegemomentes:

$$M_{y,pl20} = M_{el} + M_{pl1} + M_{pl2}$$

$$M_{y,pl20} = 7,86 * 10^{-5} + 8 * 10^{-2} + 16,53 [KNm]$$

$$\underline{M_{y,pl20} = 16,61 KNm}$$

2.5.5 Potenz- Approximation nach Ramberg-Osgood

Querschnitt mit Dehnungs- und Spannungsverlauf nach Ramberg-Osgood:

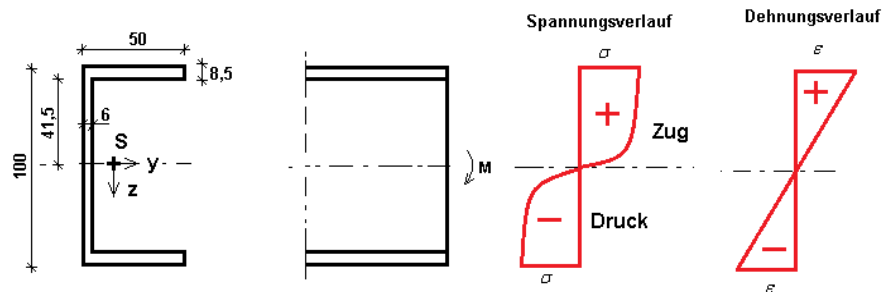


Abbildung 2-28 QS mit Dehnungs- und Spannungsverlauf nach R.-Osgood

Funktion der Spannung:

(Die Funktion wurde in 2.2.5 ermittelt.)

$$(2.27) \quad \sigma_{pl}(z) = 398 * \left(\frac{\varepsilon_1 * z}{z_1} \right)^{\frac{1}{15,58}}$$

mit $\varepsilon_1 = 0,2$ und $z_1 = 50mm$

$$(2.28) \quad \sigma_{pl}(z) = 398 * \left(\frac{0,2 * z}{50} \right)^{\frac{1}{15,58}}$$

Berechnung des plastischen Biegemomentes:

$$(2.12) \quad M_y = \int_A (\sigma_{pl}(z) * z) dA$$

$$M_{y,pl} = 2 * \left(\left(\int_{(z)} \sigma_{(z)} * z * s \right) dz + \left(\int_{(z)} \sigma_{(z)} * z * b \right) dz \right)$$

$$M_{y,pl,20} = 2 * \left(\int_0^{41,5} \left(398,13 * \left(\frac{0,2 * z}{50} \right)^{(1/15,58)} * 6 * z \right) dz + \int_{41,5}^{50} \left(398,13 * \left(\frac{0,2 * z}{50} \right)^{(1/15,58)} * 50 * z \right) dz \right) [Nmm]$$

$$\underline{M_{y,pl,20} = 17,44 KNm}$$

2.5.6 Potenz- Approximation nach Ludwik

Querschnitt mit Dehnungs- und Spannungsverlauf nach Ramberg-Osgood:

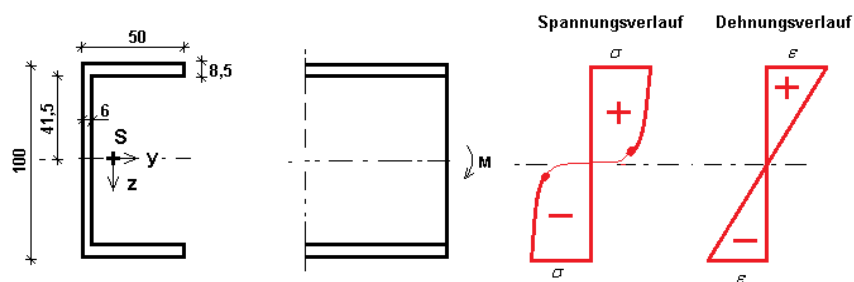


Abbildung 2-29 U-Profil mit Spannungsverlauf nach Ludwik

Funktion der plastischen Spannung:

(Die Funktionsgleichung nach Ludwik wurde in 2.2.6 ermittelt.)

$$(2.29) \quad \sigma = 210 + 226,12 * \varepsilon^{0,247}$$

$$(2.30) \quad \sigma = 210 + 226,12 * \left(\frac{\varepsilon_1 * z}{z_1} \right)^{0,247}$$

mit $\varepsilon_1 = 0,2$ und $z_1 = 50mm$

$$(2.31) \quad \sigma_{pl}(z) = 210 + 226,12 * \left(\frac{\varepsilon * 0,2}{50} \right)^{0,247}$$

Berechnung des plastischen Biegemomentes:

$$(2.12) \quad M_y = \int_A (\sigma_{pl}(z) * z) dA$$

$$\text{mit } \sigma_{pl}(z) = 210 + 226,12 * \left(\frac{\varepsilon * 0,2}{50} \right)^{0,247}$$

$$M_{y,pl} = 2 * \left(\left(\int_0^{h/2-t} \sigma_{pl}(z) * z * s \right) dz + \left(\int_{h/2-t}^{h/2} \sigma_{pl}(z) * z * b \right) dz \right)$$

$$M_{y,pl,20} = 2 * \left(\int_0^{41,5} \left(\left(210 + 226,12 * \left(\frac{\varepsilon * z}{50} \right)^{0,247} \right) * z * 6 \right) dz + \int_{41,5}^{50} \left(\left(210 + 226,12 * \left(\frac{\varepsilon * z}{50} \right)^{0,247} \right) * z * 50 \right) dz \right) [Nmm]$$

$$\underline{M_{y,pl,20} = 17,45 KNm}$$

2.5.7 Übersicht und Auswertung der Berechnungen am U-Querschnitt

Im Folgenden werden die Berechnungen am U-Querschnitt zusammenfassend tabellarisch und grafisch dargestellt. Dabei wird die Ausnutzung des Querschnittes zum idealplastischen Werkstoffgesetz angegeben.

Tabelle 6 Ergebnisse der Berechnungen

	Werkstoffgesetz	Grenzbiegemoment	Ausnutzung
a)	Idealelastisch	$M_{y,el} = 9,94 \text{ KNm}$	84%
b)	Idealplastisch	$M_{y,pl} = 11,81 \text{ KNm}$	100%
c)	Bilinear	$M_{y,pl,20} = 16,78 \text{ KNm}$	142%
d)	Trilinear	$M_{y,pl,20} = 16,61 \text{ KNm}$	140%
e)	Ramberg- Osgood	$M_{y,pl,20} = 17,44 \text{ KNm}$	147%
f)	Ludwik	$M_{y,pl,20} = 17,45 \text{ KNm}$	148%

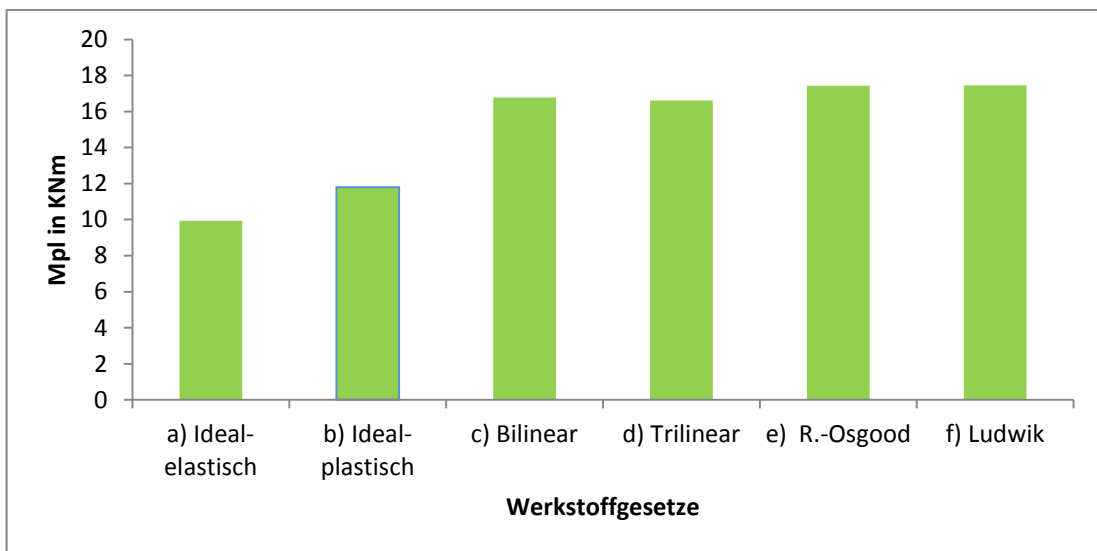


Diagramm 4 Auswertung der Berechnungen am U-Querschnitt

2.6 Zusammenfassung und Auswertung der Berechnungen

Die Berechnungen nach dem Spannungs-Dehnungsverhalten des Werkstoffes zeigen eine deutliche Mehrauslastung der Querschnitte.

Für die Näherungen nach:

Linearen Berechnungen:

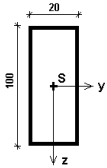
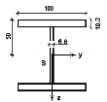
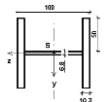
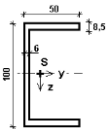
- Bilineare-Näherung
- Trilinear-Näherung

Nichtlinearen Näherungen:

- nach Ramberg-Osgood
- nach Ludwik

ergeben sich die Tabelle 7 zusammengefassten Mehrauslastungen in [%] gegenüber dem idealplastischen Werkstoffgesetz.

Tabelle 7 Auswertung der Berechnungsverfahren

Profile	Lineare Werkstoffgesetze	Nichtlineare- Werkstoffgesetze	Idealplastisches- Werkstoffgesetz
	15,95 +33%	17,33 +44%	12
	35,26 +42%	36,66 +48%	24,75
	16,47 +31%	17,67 +40%	12,58
	16,70 +41%	17,45 +45%	11,81

(Angaben der Tabelle: gemittelten Werte der Berechnungen in KNm.)

Die Unterschiede der Berechnungen Linear-Nichtlinear sind dabei für:

- Rechteckquerschnitt mit ca.9%
- Doppel-T-Querschnitt mit ca. 4%

relativ hoch. Die Ergebnisse der Berechnungen Linear und Nichtlinear unterscheiden sich mit weniger als 1% kaum voneinander.

Einfluss der Querschnittsabmessungen:

Im Folgenden soll überprüft werden, welchen Einfluss die Querschnittsabmessungen auf die Ausnutzung der Profile haben. Um dies zu beurteilen wird die Spannungsverteilung nach den verwendeten Werkstoffgesetzen am Doppel-T-Querschnitt nachfolgend dargestellt.

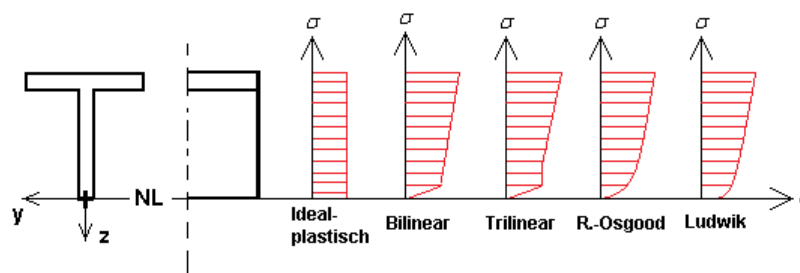


Abbildung 2-30 Spannungsverlauf der Werkstoffgesetze

Es zeigt sich, dass die äußeren Querschnittsanteile die größten Spannungen aufnehmen müssen. Die Spannungen nehmen von der Nulllinie aus bis zur äußeren Randfaser zu. Die Ausnutzung ist demnach abhängig von den Querschnittsabmessungen bzw. den Querschnittsflächen. Die äußeren Querschnittsanteile haben dabei den größeren Einfluss auf die Berechnungen. Der Berechnungsablauf wird nachfolgend erläutert.

Für die Berechnungen eines Momentes gilt:

$$M = F * a \quad (2.33)$$

Hierbei ist a der wirkende Abstand der Kraft vom Bezugspunkt. Für das plastische Biegemoment ist der Bezugspunkt die Spannungsnulllinie des Querschnitts. Die wirkende Kraft in den jeweiligen Querschnittsfasern wird dabei durch die Spannung und den dazugehörigen Faserquerschnitt gebildet.

$$F = \sigma * A \quad (2.34)$$

Der Querschnitt wird hierbei in einzelne Fasern unterteilt, diese bilden die Teilflächen A_i . Zur genauen Bestimmung sind hier differentiale Flächenelemente zu verwenden.

Mit (2.34) und (2.33) folgt mit:

$$M = \sigma * A * a \quad (2.35)$$

Mit dem Flächenmoment 1. Grades S wird eine Fläche A mit ihrem Abstand a zu einer Bezugsachse erfasst [7].

$$S_y = \int_A z dA \quad (2.36)$$

aus (2.35) und (2.36) folgt:

$$\underline{M_y = \sigma * \int_A z * dA} \quad (2.37)$$

Für die Profile Doppel-T, Rechteck soll der Einfluss der Querschnittsabmessungen überprüft werden. Die Berechnungen werden mit Excel nach Bilinearen-Werkstoffgesetz geführt. Die Tabellen sind der Anlage beigelegt.

Ergebnisse der Excel- Auswertung:

- Die Berechnungen am Rechteck ergeben für unterschiedliche Höhen und Breitenverhältnisse jeweils eine gleichbleibende Ausnutzung von 33% zur idealplastischen Berechnung.
- Die Berechnungen am Doppel-T-Profil ergeben für unterschiedliche Höhen und Breitenverhältnisse jeweils eine Ausnutzung von 35%-43% zur idealplastischen Berechnung.

Auf weitere Untersuchungen wurde an dieser Stelle verzichtet.

3 Experimentelle Dehnungs-und Verformungsbestimmung

Im praktischen Versuch der Dehnungs-und Verformungsbestimmung soll überprüft werden, wie sich der Querschnitt bei elastischer und plastischer Beanspruchung verhält. Hierbei sollen die Dehnungen im Gurt-und Stegbereich sowie die Verformungen des Versuchsträgers bei elastischer und plastischer Beanspruchung bestimmt werden.

3.1 Grundlagen und Ablauf der Versuchsdurchführung

Die experimentelle Dehnungs-und Verformungsbestimmung beinhaltet mehrere Messungen im elastischen Bereich sowie eine abschließende Messung in den plastischen Bereich bis zum Versagen des Profils. Die Messungen im elastischen Bereich dienen zur Kontrolle des Versuchsstandes sowie zur Überprüfung der Elastizitätstheorie. Die Auswertung der Versuchsreihe elastisch sollte die für den Werkstoff S235 typische Hookesche- Gerade im Spannungs- Dehnungs- Verhalten aufzeigen, zudem sollten die Verformungen elastisch bleiben d.h. der Träger sollte nach jedem Versuch in seine Ausgangslage zurückkehren. Der abschließende plastische Versuch soll zeigen, wie sich der Träger außerhalb des elastischen Bereiches verhält. Hierbei soll in der Auswertung die Ermittlung eines Kraft-Verformungs-Diagrammes und eines Dehnungs-Verformungs-Diagrammes aus den experimentell bestimmten Werten dienen.

Die Auswertung soll weiterhin zeigen, ob die vorangegangenen Berechnungen anhand des Spannungs-Dehnungs-Diagrammes für eine Bestimmung des plastischen Grenzbiegemomentes in Frage kommen bzw. wie diese Berechnungen anzunehmen sind.

3.1.1 Grundlagen der Spannungs-und Dehnungsmessung mittels DMS

Das Verfahren zur Spannungs-und Dehnungsbestimmung mittels Dehnmessstreifen beruht auf der Änderung des Ohmschen-Widerstandes infolge elastischer Verformung metallischer Drähte. Die Widerstandsänderung der Dehnmessstreifen wird in geeignete elektrische Signale umgewandelt und in einem Messverstärker angezeigt.

Der Zusammenhang zwischen relativer Widerstandsänderung und relativer Längenänderung lässt sich durch:

$$\frac{dR}{R} = k * \frac{dL}{L} \quad (3.1)$$

angeben [9].

Hierbei ist k ein Proportionalitätsfaktor. Die auf den Widerstand R des verformten Drahtes bezogene Widerstandsänderung dR ist in erster Näherung der auf die Ausgangslänge L bezogenen Längenänderung proportional. Für kleine Dehnungen ε entsteht zwischen relativer Widerstandsänderung und Dehnung der lineare Zusammenhang:

$$\frac{dR}{R} = k * \varepsilon \quad (3.2)$$

Der Messdraht eines Dehnmessstreifens wird flächenhaft, mäanderförmig oder als Flachspule ausgebildet. Zum Schutz vor Beschädigungen wird der DMS auf Papier oder Kunstharzfolien als Trägermaterial angeordnet. Zwei verstärkte Anschlussdrähte werden zur Herstellung der elektrischen Verbindung aus dem Trägermaterial herausgeführt und über eine Lötverbindung mit dem Anschlusskabel verbunden.

Bild Abbildung 3-1 zeigt den schematischen Aufbau eines Dehnmessstreifens.

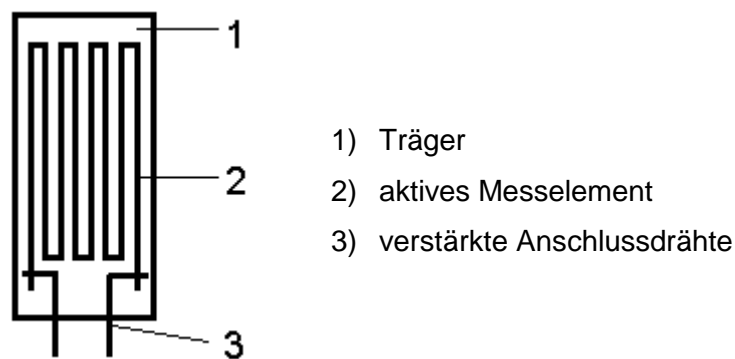


Abbildung 3-1 Aufbau eines DMS

Die Dehnmessstreifen werden durch Aufkleben auf das zu untersuchende Bauteil befestigt. Die Klebeverbindung muss dabei die Verformungen des Bauteils über den Träger auf den Messdraht übertragen. Die Anforderungen des Klebers sind daher hinsichtlich seines Haftvermögens, der Kriechfestigkeit, Feuchtigkeitsunempfindlichkeit, und Temperaturbeständigkeit entsprechend hoch [9].

3.1.2 Wheatstonesche-Brückenschaltung

Die Widerstandsänderung eines Dehnmessstreifens im gedehnten Zustand beträgt nur wenige Promille seines Gesamtwiderstandes. Um diese Widerstandsänderung besser erfassen zu können verwendet man eine besondere Schaltungstechnik, die es ermöglicht, diese kleinen Widerstände zu erfassen. Mit Hilfe der Wheatstoneschen Brückenschaltung ist es möglich, diese kleinen Widerstände zu messen und in Form von Spannungsänderungen zu erfassen.

Abbildung 3-2 zeigt die Wheatstonesche Brückenschaltung. Die Brückenschaltung wird durch zwei Brückenarme gebildet. Die einzelnen Widerstände werden je nach Anwendungsfall durch Dehnmessstreifen gebildet; hieraus ergeben sich je nach Anwendungsfall verschiedene Möglichkeiten der Verwendung dieser Brückenschaltung.

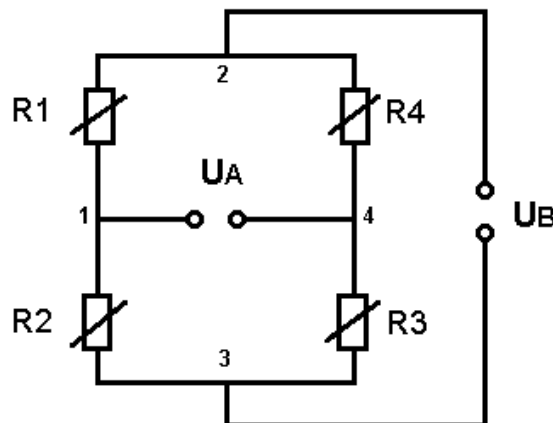


Abbildung 3-2 Wheatstonesche Brückenschaltung

Für praktische Anwendungsfälle gilt:

$$\frac{U_A}{U_B} = \frac{k}{4} \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4) \quad (3.3)$$

Hierbei ist k ein vom Hersteller vorgegebener Faktor des Dehnmessstreifens, der das Verhältnis von Längenänderung zur Widerstandsänderung des Dehnmessstreifens angibt. Die relative Widerstandsänderung der Einzelwiderstände wird durch die Dehnung ε angegeben.

Um möglichst genaue Messungen zu erhalten, müssen Messfehler von vornherein ausgeschlossen bzw. gemindert werden. Je nach Verwendung des DMS kommen hier verschiedene Fehlerquellen in Betracht. Für den folgenden Versuch, der unter Laborbedingungen ausgeführt wird, begrenzt sich die Anzahl der möglichen Fehlerquellen auf:

- Applikation der DMS
- Temperaturänderungen
- mechanische Gefährdung
- Bauteileigenschaften
- Kabeleinflüsse
- Überschreitung der Anwendbarkeitsgrenzen

Abbildung 3-3 zeigt eine Zusammenfassung über mögliche Fehlerquellen und Störeinflüsse bei DMS-Messungen.

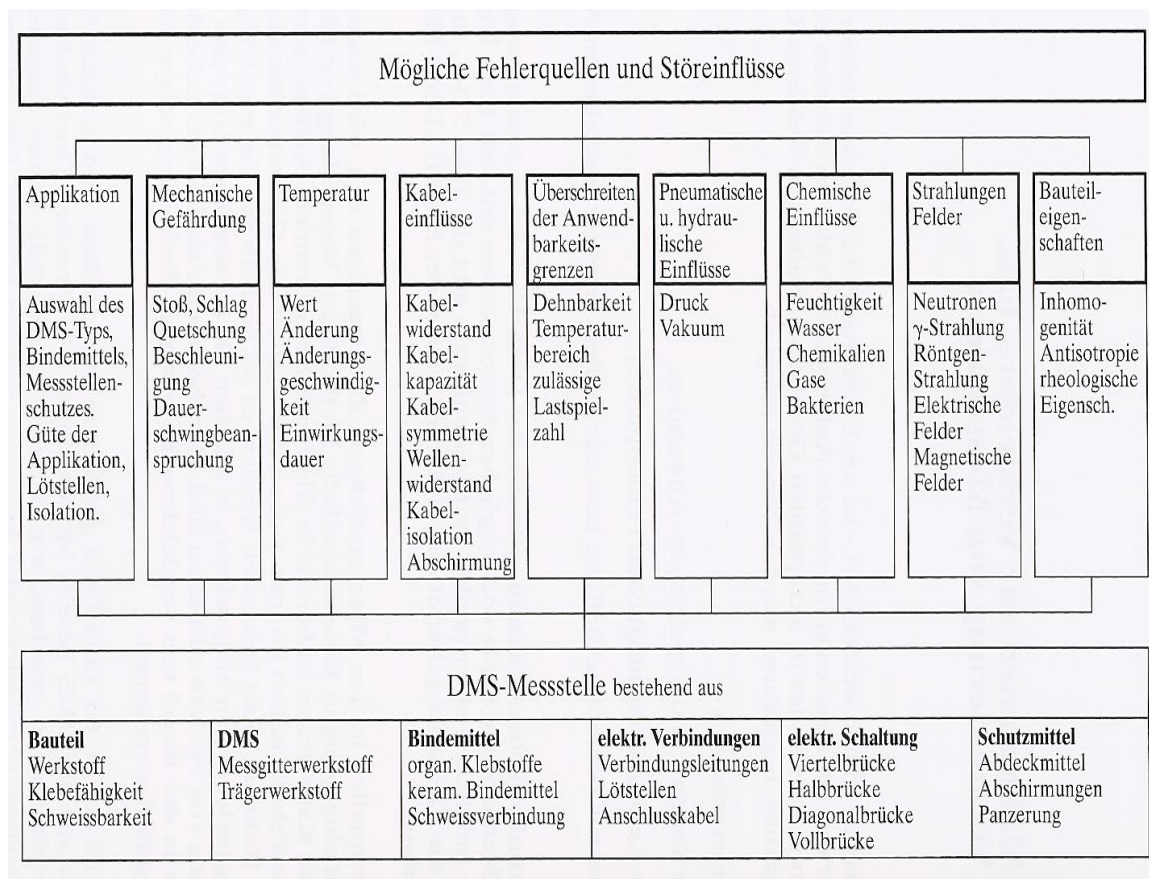


Abbildung 3-3 Fehlerquellen und Störeinflüsse auf eine DMS- Messstelle [10]

Der Einfluss der Temperatur lässt sich sehr gut durch die Verwendung eines weiteren DMS innerhalb der Messschaltung kompensieren. Der sogenannte Kompensations-DMS wird hierbei auf eine mechanisch unbeanspruchte Stelle des Messobjektes appliziert. Der Kompensationsdehnungsmessstreifen muss die gleichen zeitlichen und betragsmäßigen Temperaturveränderungen erleben wie der messende DMS.

Um die Fehlerquelle der Temperatur für die Dehnungsmessung auszuschließen wird im praktischen Versuch eine Viertelbrücke mit Kompensations-DMS verwendet.

In der Abbildung 3-4 ist die Wheatstonesche- Brückenschaltung als Viertelbrücke mit Kompensations-DMS dargestellt.

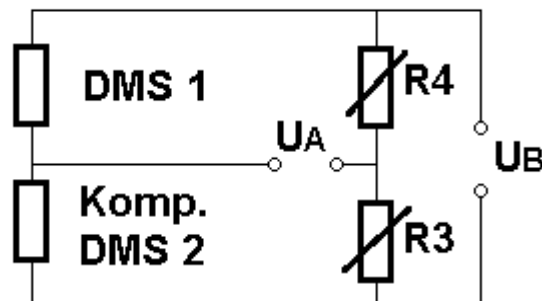


Abbildung 3-4 Viertelbrücke mit Kompensations-DMS

Der messende DMS 1 liefert das Dehnungssignal ε_1 . Diese Dehnung bildet sich aus der mechanischen Beanspruchung und der thermischen Beanspruchung des Messobjektes. Der Kompensations-DMS 2 liefert hingegen nur einen thermischen Dehnungsanteil ε_2 . Der angezeigte Messwert der Anzeige ε_a entspricht damit allein der durch die mechanische Beanspruchung verursachten Dehnung [10].

$$\varepsilon_a = (\varepsilon_{mech} + \varepsilon_{therm}) - (\varepsilon_{therm}) = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \quad (3.4)$$

Der Einfluss der Leitungswiderstände kann bei sehr langen Kabelverbindungen erheblichen Einfluss auf die Messgenauigkeit haben. Die Widerstände der Verbindungsleitungen mindern den vom DMS aufgenommenen Messwert. Durch spezielle Kalibrierungsmethoden kann dieser Fehler eliminiert werden. Für den folgenden Versuch erfolgt eine Kalibrierung mit dem vom Messverstärker gelieferten Kalibriersignals. Diese Kalibrierungsmethode ist bei kurzen Kabeln hinreichend genau.

3.2 Auswahl des Querschnittes

Für die experimentelle Spannungs-Dehnungsbestimmung ist ein für die Versuchsbedingungen geeigneter Querschnitt zu wählen. Das gewählte Profil soll angesichts der praktischen Möglichkeiten, des vorhandenen Versuchsstandes und der messtechnischen Möglichkeiten für eine plastische Verformung geeignet sein.

Als Auswahlkriterium gilt:

aus Labor:

- Hydraulikzylinder mit einer Druckkraft bis 500kN
- Druckstempel mit einem Durchmesser von 80mm

Querschnitt:

- ausreichende Fläche für den Druckstempel und das Aufbringen der Prüfkraft F
- ausreichende vorhandene Fläche im Gurt- und Stegbereich zum Aufbringen der Dehnmessstreifen
- Ausschluss der Beul- und Knickgefahr
- Handlichkeit (geringes Gewicht)

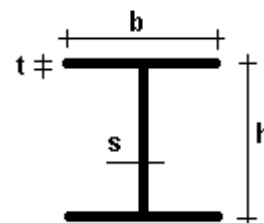
Die im Labor vorhandenen Möglichkeiten und die Bedingungen aus dem Querschnitt schließen eine Reihe von Profilen von vornherein aus. Maßgebend für die Auswahl war der Ausschluss der Knickgefahr und eine ausreichend dicke Gurtbreite bei geringem Gewicht sowie eine ausreichende Querschnittshöhe und Breite zur Aufbringung der Dehnmessstreifen. Unter Beachtung der Auswahlkriterien fiel die Wahl auf ein Profil der HEB- Reihe mit einer Länge von $l = 1500\text{mm}$.

wähle: nach DIN1025-2 **HEB100**

Profilmaße:

Höhe $h = 100\text{mm}$; Gurtbreite $b = 100\text{mm}$;

Gurtdicke $t = 10\text{mm}$; Stegdicke $s = 6\text{mm}$



Statische Werte:

$A=26\text{cm}^2$; $I_y=450\text{cm}^4$; $S_y=52,10\text{cm}^3$; $g=0,204\text{KN/m}$; $W_{el,y}=89,9\text{cm}^3$

Das elastische Grenzbiegemoment beträgt:

$$M_{el,y,d} = \sigma_{R,d} * W_{el,y} \quad (3.5)$$

mit $\sigma_{R,d} = \frac{f_{y,k}}{\gamma_m}$ und $f_{y,k} = 24 \text{ KN/cm}^2$ und $\gamma_m = 1,1$

$$M_{el,y,d} = \frac{24}{1,1} * 89,9 \text{ [KNcm]}$$

$$\underline{M_{el,y,d} = 19,61 \text{ KNm}}$$

Das charakteristische elastische Grenzbiegemoment beträgt:

$$M_k = M_d * \gamma_m \quad (3.6)$$

mit $M_{el,y,d} = 19,61 \text{ KNm}$ und $\gamma_m = 1,1$

$$M_{el,y,k} = 19,61 \text{ KNm} * 1,1$$

$$\underline{M_{el,y,k} = 21,58 \text{ KNm}}$$

Berechnung der elastischen Grenzkraft:

Die Berechnung erfolgt für einen Träger auf zwei Stützen mit einer mittig wirkenden Einzellast F. Die Berechnungen erfolgen nach [11].

$$\max M = \frac{F * l}{4} \quad (3.7)$$

umstellen nach F liefert:

$$F = \frac{\max M * 4}{l} \quad (3.8)$$

mit $\max M = M_{el,y,k} = 21,58 \text{ KNm}$ und $l = 1,4 \text{ m}$

$$F = \frac{21,58 * 4}{1,40} \text{ [KN]}$$

$$\underline{F = 61,65 \text{ KN}} \text{ notwendig.}$$

Die maximale Durchbiegung für das elastische Grenzbiegemoment beträgt:

$$w = \frac{F * l^3}{48 * E * I_y} \quad (3.9)$$

mit: $F = 61,45 \text{ KN}$, $l = 140 \text{ cm}$, $E = 21000 \text{ KN / cm}^2$, $I_y = 450 \text{ cm}^4$

$$w = \frac{61,65 \text{ KN} * (140 \text{ cm})^3}{48 * 21000 \text{ KN / cm}^2 * 450 \text{ cm}^4} [\text{cm}]$$

$$\underline{w = 3,7 \text{ mm}}$$

Das plastische Grenzbiegemoment beträgt, unter Beachtung der Mindestwerte der Streckgrenze:

$$M_{pl,y,d} = 2 * S_y * \sigma_{R,d} \quad (3.10)$$

$$\text{mit: } \sigma_{R,d} = \frac{f_{y,k}}{\gamma_m} = \frac{24 \text{ KN / cm}^2}{1,1} = 21,82 \text{ KN / cm}^2$$

$$M_{pl,y,d} = 2 * 52,1 * 21,82 [\text{KNcm}]$$

$$\underline{M_{pl,y,d} = 22,73 \text{ KNm}}$$

Das charakteristische elastische Grenzbiegemoment beträgt:

$$(3.6) \quad M_k = M_d * \gamma_m$$

mit $M_{pl,y,d} = 22,73 \text{ KNm}$ und $\gamma_m = 1,1$

$$\underline{M_{pl,y,k} = 25,01 \text{ KNm}}$$

Berechnung der plastischen Grenzkraft:

$$(3.8) \quad F = \frac{M * 4}{l}$$

mit $M_{pl,y,k} = 25,01 \text{ KNm}$ und $l = 1,4 \text{ m}$

$$F = \frac{25,01 * 4}{1,40} [\text{KN}]$$

$$\underline{F = 71,45 \text{ KN}}$$

3.2.1 Statisches System des Versuches

Als statisches System der Versuchsdurchführung wird ein Einfeldträger mit einer mittig wirkenden Einzellast angenommen. In Abbildung 3-5 sind die wirkenden Schnittgrößenverläufe dargestellt.

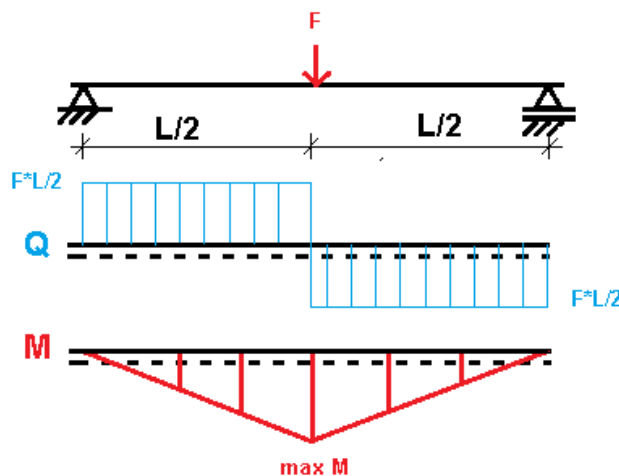


Abbildung 3-5 Statisches System und Schnittgrößenverlauf

$$(3.7) \quad \max M = \frac{F * l}{4}$$

3.2.2 Prüfstand und Versuchsaufbau

Die experimentelle Dehnungs-und Verformungsbestimmung wird am Profil HEB 100 durchgeführt. Hierfür wurden dem Profil zwei Dehnmessstreifen appliziert. Ein DMS an der Oberseite des Zuggurtes sowie ein weiterer DMS unterhalb der neutralen Faser im Stegbereich. In Abbildung 3-6 ist der Versuchsaufbau und der Prüfstand im Labor der Hochschule zu sehen.

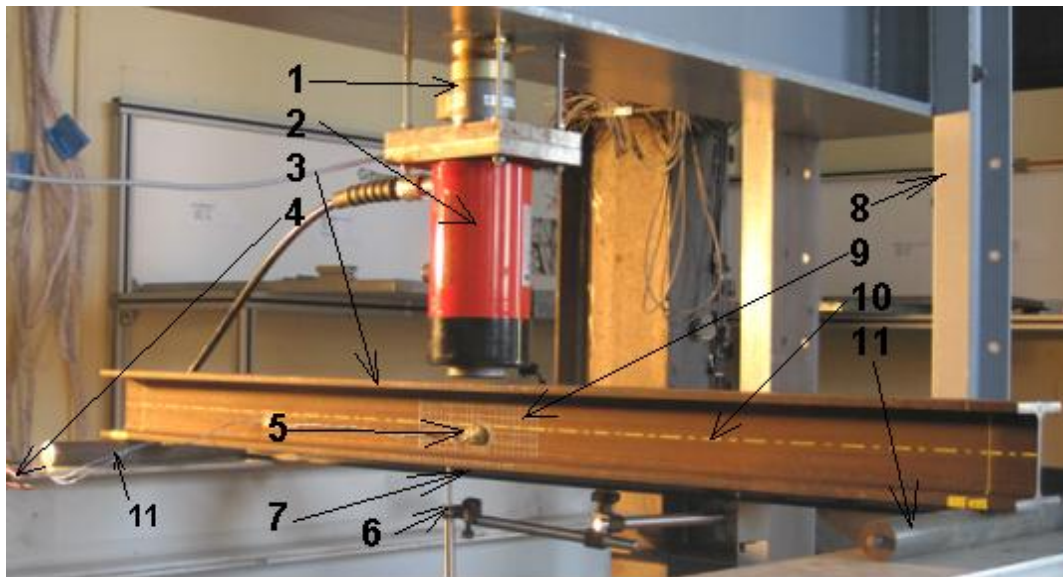
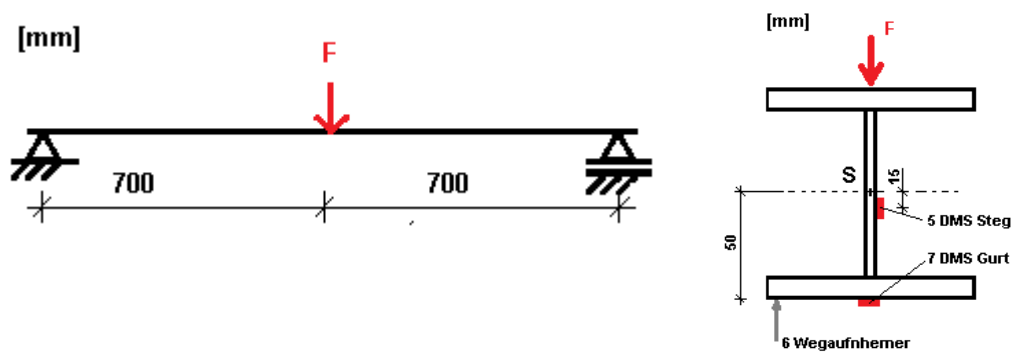


Abbildung 3-6 Prüfstand und Versuchsaufbau



- | | | | |
|---|------------------------|----|------------------|
| 1 | Kraftmessdose | 7 | DMS Gurt |
| 2 | Hydraulikzylinder | 8 | Prüfstand |
| 3 | Versuchsträger HEB 100 | 9 | Applikationsfeld |
| 4 | Kompensations- DMS | 10 | Träger Nulllinie |
| 5 | DMS Steg | 11 | Auflager |
| 6 | Wegaufnehmer | | |

Der auf zwei massiven Stahlrollen gelagerte Versuchsträger wird mittig durch den Druckstempel des Hydraulikzylinders mit der Kraft F belastet. Die Kraft wird dabei durch eine Hydraulikpresse aufgebracht. Die Dehnungen im Gurt und Steg sowie die Durchbiegung des Trägers an der maximal beanspruchten Stelle werden von der Messtechnik aufgezeichnet.

verwendete Messmittel:

- | | | |
|------------------|-------------------------------------|--------|
| • Kraftmessdose | C6A/500KN | Fa.HBM |
| • Wegaufnehmer | WA/50mm | Fa.HBM |
| • DMS Typ | 6/120ALY11 120 Ω \pm 0,35% | Fa.HBM |
| • Messverstärker | MGCplus AB22A/AB32 | Fa.HBM |

3.3 Elastische Dehnungs- und Verformungsbestimmungen

Bei der elastischen Dehnungs-und Verformungsbestimmung soll der Versuchsträger mehrfach bis zur theoretischen Streckgrenze belastet werden. Die Messungen im elastischen Bereich dienen zur Vorbereitung des plastischen Versuches. Hierbei sollen mögliche Fehlerquellen und Ungenauigkeiten der Messungen gefunden werden.

Es wird überprüft:

- Brauchbarkeit des statischen Systems
- Eignung des Versuchsaufbaues

Die Auswertung der Versuchsergebnisse des elastischen Versuches soll u.a. die Berechnungen der Spannungen im Gurt und Steg sowie der Durchbiegung bestätigen. Die Erstellung eines Spannungs-Dehnungs-Diagrammes aus den Versuchswerten soll den linearen Zusammenhang der Spannungen und Dehnungen im elastischen Bereich bestätigen.

3.3.1 Versuchsergebnisse Elastisch

Ein Auszug der im Experiment ermittelten Werte sind in Tabelle 8 zusammengefasst. Die komplette Auflistung der Messergebnisse ist im Anhang bzw. auf der CD-ROM enthalten.

Tabelle 8 Versuchsergebnisse Elastisch

Versuch 1 -Elastisch-

F in [kN]	ϵ_{Steg} [$\mu\text{m}/\text{m}$]	ϵ_{Gurt} [$\mu\text{m}/\text{m}$]	w [mm]
9,82	64	205	0,75
19,44	125	405	1,44
30,23	194	627	2,15
40,09	256	828	2,78
50,05	319	1029	3,41
59,97	380	1230	4,03

Versuch 2 -Elastisch-

F in [kN]	ϵ_{Steg} [$\mu\text{m}/\text{m}$]	ϵ_{Gurt} [$\mu\text{m}/\text{m}$]	w [mm]
9,89	64	207	0,69
20,13	130	419	1,39
29,8	191	618	2,01
40,28	257	831	2,68
50,23	319	1032	3,3
60,02	380	1229	3,89

Versuch 3 -Elastisch-

F in [kN]	ϵ_{Steg} [$\mu\text{m}/\text{m}$]	ϵ_{Gurt} [$\mu\text{m}/\text{m}$]	w [mm]
9,9	64	208	0,71
20,01	129	417	1,4
30,24	193	626	2,06
40,19	255	827	2,69
50,18	318	1028	3,31
60,05	379	1227	3,9

Versuch 4 -Elastisch-

F in [kN]	ϵ_{Steg} [$\mu\text{m}/\text{m}$]	ϵ_{Gurt} [$\mu\text{m}/\text{m}$]	w [mm]
9,16	59	193	0,65
19,99	127	417	1,38
30,12	191	623	2,03
40,05	253	824	2,66
50,19	316	1028	3,26
60,02	377	1226	3,82

Versuch 5 -Elastisch-

F in [kN]	ϵ_{Steg} [$\mu\text{m}/\text{m}$]	ϵ_{Gurt} [$\mu\text{m}/\text{m}$]	w [mm]
10,63	69	222	0,73
19,85	128	412	1,35
30,02	192	620	2
40,41	257	830	2,63
50,14	318	1026	3,19
59,98	380	1225	3,78

3.3.2 Versuchsauswertung Elastisch

Für die Versuchsauswertung werden nun die Spannung im Steg und Gurt sowie die Durchbiegung rechnerisch ermittelt. Die Berechnung wird beispielhaft aus den ersten ermittelten Versuchswerten der Tabelle 8 bestimmt. Eine Zusammenstellung der berechneten und der im Versuch ermittelten Werte ist in Tabelle 11 zusammengefasst.

Berechnung des maximalen Biegemomentes:

$$(3.7) \quad M = \frac{F * l}{4}$$

mit $\bar{F} = 9,88 \text{ KN}$ und $l = 1,4 \text{ m}$:

$$M = \frac{9,88 \text{ KN} * 1,40 \text{ m}}{4} \text{ [KNm]}$$

$$\underline{M = 3,46 \text{ KNm}}$$

Berechnung der Spannung im Steg:

$$(1.5) \quad M = \frac{\sigma * I_y}{z}$$

mit $M = 3,46 \text{ KNm}$; $I_y = 450 \text{ cm}^4$; $z = 1,5 \text{ cm}$

$$\sigma_{\text{Steg}} = \frac{3,46 * 100}{450} * 1,5 \text{ [KN / cm}^2\text{]}$$

$$\underline{\sigma_{\text{Steg}} = 1,15 \frac{\text{KN}}{\text{cm}^2}}$$

Berechnung der Spannung im Gurt:

$$(1.5) \quad M = \frac{\sigma * I_y}{z}$$

mit $M = 3,46 \text{ KNm}$; $I_y = 450 \text{ cm}^4$; $z = 5 \text{ cm}$

$$\sigma_{Gurt} = \frac{3,46 * 100}{450} * 5 [KN / cm^2]$$

$$\underline{\sigma_{Gurt} = 3,84 \frac{KN}{cm^2}}$$

Berechnung der maximalen Verformung:

$$(3.9) \quad w = \frac{F * l^3}{48 * E * I_y}$$

$$\text{mit } \bar{F} = 9,88KN; I_y = 450cm^4; l = 140cm; E = 21000KN / cm^2$$

$$w = \frac{9,88 * 140^3}{48 * 21000 * 450} [cm]$$

$$\underline{w = 0,60mm}$$

Berechnung der Spannungen aus den experimentell ermittelten Dehnungen:

Für die Berechnung der Spannungen im elastischen Bereich gilt:

$$(2.13) \quad \sigma = E * \varepsilon$$

Spannung im Steg:

$$\text{mit } E = 21000KN / cm^2 \text{ und } \bar{\varepsilon} = 64\mu m / m$$

$$\sigma = 21000 * 64 * 10^{-6} [KN / cm^2]$$

$$\underline{\sigma = 1,34KN / cm^2}$$

Spannung im Gurt:

$$\text{mit } E = 21000KN / cm^2 \text{ und } \bar{\varepsilon} = 207\mu m / m$$

$$\sigma = 21000 * 207 * 10^{-6} [KN / cm^2]$$

$$\underline{\sigma = 4,35KN / cm^2}$$

Zusammenfassung der Berechnungen:

Tabelle 9 Zusammenfassung Versuch und Berechnungen Elastisch

	Analytisch	Experiment	
Spannung im Steg [KN/cm ²]	$\sigma_{Steg} = 1,15$	$\bar{\varepsilon} = 64 \mu m / m$	$\sigma_{Steg} = 1,34$
Spannung im Gurt [KN/cm ²]	$\sigma_{Gurt} = 3,84$	$\bar{\varepsilon} = 207 \mu m / m$	$\sigma_{Gurt} = 4,35$
Durchbiegung [mm]	$w = 0,60$	$\bar{w} = 0,71$	

Die berechneten Werte in Tabelle 9 zeigen deutliche Unterschiede der Spannungen und der Durchbiegung. In den Berechnungen wurde der E-Modul als Werkstoffkonstante angenommen mit:

- $E = 21000 \text{ KN} / \text{cm}^2$

Es soll überprüft werden, wie hoch der E-Modul des Werkstoffes von der Annahme abweicht.

Aus der berechneten Spannung und der dazugehörigen experimentell ermittelten Dehnung wird der E-Modul bestimmt und die analytischen Berechnungen wiederholt.

$$(2.13) \quad \sigma = E * \varepsilon$$

$$\text{mit } \sigma_{Gurt} = 3,84 \frac{\text{KN}}{\text{cm}^2} \text{ und } \bar{\varepsilon} = 207 \mu m / m$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{3,84}{207 * 10^{-6}} [\text{KN} / \text{cm}^2]$$

$$\underline{E = 18550,72 \text{ KN} / \text{cm}^2}$$

$$\underline{E = 21000 \text{ KN} / \text{cm}^2 > E = 18550 \text{ KN} / \text{cm}^2}$$

$$\underline{\Delta E = 2450 \text{ KN} / \text{cm}^2}$$

Die Berechnungen mit: $E = 18550 \text{ KN} / \text{cm}^2$

Tabelle 10 Zusammenfassung Versuch und Berechnungen mit veränd. E-Modul

	Analytisch	Experiment	
Spannung im Steg [KN/cm ²]	$\sigma_{\text{Steg}} = 1,15$	$\bar{\varepsilon} = 64 \mu\text{m} / \text{m}$	$\sigma_{\text{Steg}} = 1,19$
Spannung im Gurt [KN/cm ²]	$\sigma_{\text{Gurt}} = 3,84$	$\bar{\varepsilon} = 207 \mu\text{m} / \text{m}$	$\sigma_{\text{Gurt}} = 3,84$
Durchbiegung [mm]	$w = 0,68$	$\bar{w} = 0,71$	

Die Unterschiede in den Berechnungen entstehen u.a. aufgrund der Annahmen der Werkstoffkonstanten und der Querschnittskennwerte. Die Berechnung mit verändertem E-Modul zeigt eine gute Näherung der berechneten und der experimentell bestimmten Werte.

In der nachfolgenden Tabelle 11 sind die Berechnungen und die im Experiment ermittelten Werte der elastischen Versuche zusammengestellt.

Hierbei bedeuten:

$\sigma_{\text{Steg}}(\varepsilon)$ $\sigma_{\text{Gurt}}(\varepsilon)$	berechnete Spannung aus den experimentell ermittelten Dehnungen berechnet mit (2.3) und $E=21000 \text{ KN/cm}^2$
$\sigma_{\text{Steg}}(F)$ $\sigma_{\text{Gurt}}(F)$	berechnete Spannung aus der wirkenden Kraft berechnet mit (1.5)
$\Delta\sigma_{\text{Steg}}$ $\Delta\sigma_{\text{Gurt}}$	Differenz der ermittelten Spannungen
w(gem.)	im Experiment ermittelte Durchbiegung
w(ber.)	berechnete Durchbiegung
Δw	Differenz der ermittelten Durchbiegung

Tabelle 11 Zusammenfassung Versuch und Berechnungen Elastisch

Vergleich Versuch 1 -Elastisch-

[kN]	[kN/cm ²]			[kN/cm ²]			[mm]		
Kraft F	$\sigma_{\text{Steg}} (\epsilon)$	$\sigma_{\text{Steg}} (F)$	$\Delta \sigma_{\text{Steg}}$	$\sigma_{\text{Gurt}} (\epsilon)$	$\sigma_{\text{Gurt}} (F)$	$\Delta \sigma_{\text{Gurt}}$	w (gem.)	w (ber.)	Δw
9,82	1,34	1,15	0,19	4,31	3,82	0,49	0,75	0,59	0,16
19,44	2,63	2,27	0,36	8,51	7,56	0,94	1,44	1,18	0,26
30,23	4,07	3,53	0,54	13,17	11,76	1,41	2,15	1,83	0,32
40,09	5,38	4,66	0,72	17,39	15,55	1,84	2,78	2,43	0,35
50,05	6,70	5,84	0,86	21,61	19,46	2,15	3,41	3,03	0,38
59,97	7,98	7,00	0,98	25,83	23,32	2,51	4,03	3,63	0,40

Vergleich Versuch 2 -Elastisch-

[kN]	[kN/cm ²]			[kN/cm ²]			[mm]		
Kraft F	$\sigma_{\text{Steg}} (\epsilon)$	$\sigma_{\text{Steg}} (F)$	$\Delta \sigma_{\text{Steg}}$	$\sigma_{\text{Gurt}} (\epsilon)$	$\sigma_{\text{Gurt}} (F)$	$\Delta \sigma_{\text{Gurt}}$	w (gem.)	w (ber.)	Δw
9,89	1,34	1,15	0,19	4,35	3,85	0,50	0,69	0,60	0,09
20,13	2,73	2,35	0,38	8,80	7,83	0,97	1,39	1,22	0,17
29,80	4,01	3,48	0,53	12,98	11,59	1,39	2,01	1,80	0,21
40,28	5,40	4,70	0,70	17,45	15,67	1,78	2,68	2,44	0,24
50,23	6,70	5,86	0,84	21,67	19,53	2,14	3,30	3,04	0,26
60,02	7,98	7,00	0,98	25,81	23,34	2,47	3,89	3,63	0,26

Vergleich Versuch 3 -Elastisch-

[kN]	[kN/cm ²]			[kN/cm ²]			[mm]		
Kraft F	$\sigma_{\text{Steg}} (\epsilon)$	$\sigma_{\text{Steg}} (F)$	$\Delta \sigma_{\text{Steg}}$	$\sigma_{\text{Gurt}} (\epsilon)$	$\sigma_{\text{Gurt}} (F)$	$\Delta \sigma_{\text{Gurt}}$	w (gem.)	w (ber.)	Δw
9,90	1,34	1,15	0,19	4,37	3,85	0,52	0,71	0,60	0,11
20,01	2,71	2,33	0,38	8,76	7,78	0,98	1,40	1,21	0,19
30,24	4,05	3,53	0,52	13,15	11,76	1,39	2,06	1,83	0,23
40,19	5,36	4,69	0,66	17,37	15,63	1,74	2,69	2,43	0,26
50,18	6,68	5,85	0,83	21,59	19,51	2,08	3,31	3,04	0,27
60,05	7,96	7,01	0,95	25,77	23,35	2,42	3,90	3,63	0,27

Vergleich Versuch 4 -Elastisch-

[kN]	[kN/cm ²]			[kN/cm ²]			[mm]		
Kraft F	$\sigma_{\text{Steg}} (\epsilon)$	$\sigma_{\text{Steg}} (F)$	$\Delta \sigma_{\text{Steg}}$	$\sigma_{\text{Gurt}} (\epsilon)$	$\sigma_{\text{Gurt}} (F)$	$\Delta \sigma_{\text{Gurt}}$	w (gem.)	w (ber.)	Δw
9,16	1,24	1,07	0,17	4,05	3,56	0,49	0,65	0,55	0,10
19,99	2,67	2,33	0,34	8,76	7,77	0,99	1,38	1,21	0,17
30,12	4,01	3,51	0,50	13,08	11,71	1,37	2,03	1,82	0,21
40,05	5,31	4,67	0,64	17,30	15,57	1,73	2,66	2,42	0,24
50,19	6,64	5,86	0,78	21,59	19,52	2,07	3,26	3,04	0,22
60,02	7,92	7,00	0,92	25,75	23,34	2,41	3,82	3,63	0,19

Vergleich Versuch 5 -Elastisch-

[kN]	[kN/cm ²]			[kN/cm ²]			[mm]		
Kraft F	$\sigma_{\text{Steg}} (\epsilon)$	$\sigma_{\text{Steg}} (F)$	$\Delta \sigma_{\text{Steg}}$	$\sigma_{\text{Gurt}} (\epsilon)$	$\sigma_{\text{Gurt}} (F)$	$\Delta \sigma_{\text{Gurt}}$	w (gem.)	w (ber.)	Δw
10,63	1,45	1,24	0,21	4,66	4,13	0,53	0,73	0,64	0,09
19,85	2,69	2,32	0,37	8,65	7,72	0,93	1,35	1,20	0,15
30,02	4,03	3,50	0,53	13,02	11,68	1,34	2,00	1,82	0,18
40,41	5,40	4,66	0,74	17,43	15,54	1,89	2,63	2,44	0,19
50,14	6,68	5,58	1,10	21,55	19,50	2,05	3,19	3,03	0,16
59,98	7,98	7,00	0,98	25,73	23,32	2,41	3,78	3,63	0,15

Einfluss der wirkenden Kraft auf die Verformung:

Um den Einfluss der einwirkenden Kraft auf die Verformung darzustellen, werden aus den Versuchsergebnissen Elastisch aus Tabelle 8 die Mittelwerte der Kraft \bar{F} und der Verformung \bar{w} gebildet. Daraus wird das Kraft-Verformungs-Diagramm erstellt.

Tabelle 12 Mittelwert der Kraft F und der Verformung w der Versuche Elastisch

\bar{F} in KN	0	9,88	19,88	30,08	40,20	50,16	60,01
\bar{w} in mm	0	0,71	1,39	2,05	2,69	3,29	3,88

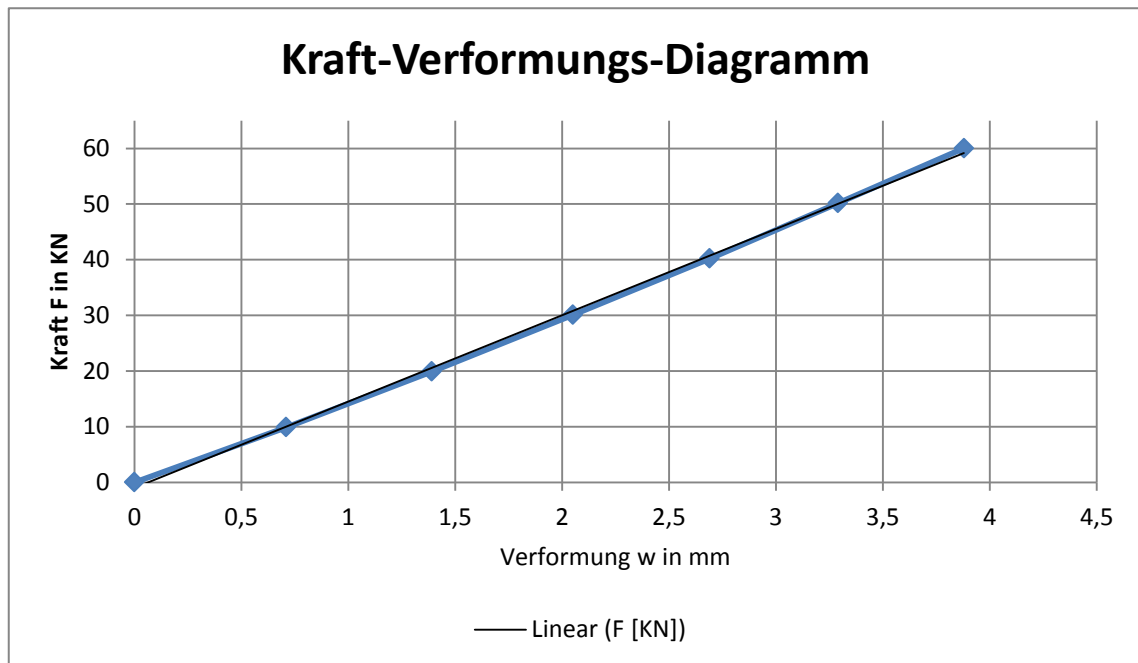


Diagramm 5 Kraft-Verformungs-Diagramm Elastisch

Das Diagramm zeigt einen linearen Kraft-Verformungs-Verlauf. Gut zu erkennen ist dies an der eingezeichneten Linearen-Trendlinie. Dies bestätigt das elastische Verhalten im Elastischen.

Ermittlung des Spannungs-und Dehnungsverhaltens am DMS-Steg:

Aus den experimentell Versuchswerten in Tabelle 8 wird für die Dehnungen im Steg und Gurt ein Spannungs-Dehnungs-Diagramm erstellt.

mit: $E = 21000 \text{ KN} / \text{cm}^2$

$$(2.13) \quad \sigma = E * \varepsilon$$

\bar{F} in KN	0	9,88	19,88	30,08	40,20	50,16	60,01
$\bar{\varepsilon}$ Steg [$\mu\text{m} / \text{m}$]	0	64	128	192	256	318	379
$\bar{\sigma}$ Steg [KN / cm^2]	0	1,34	2,69	4,03	5,38	6,68	7,96

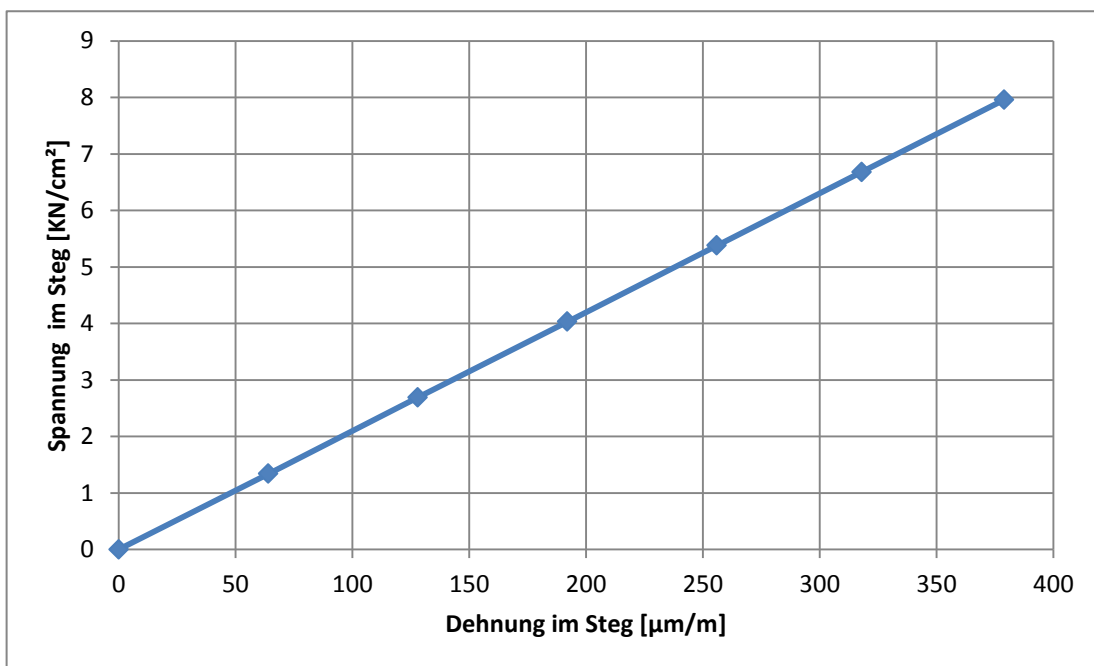


Diagramm 6 S-D-Diagramm DMS-Steg

Ermittlung des Spannungs-Dehnungs-Verhaltens am DMS-Gurt:mit: $E = 21000 \text{ KN} / \text{cm}^2$

(2.13)
$$\sigma = E * \varepsilon$$

\bar{F} in KN	0	9,88	19,88	30,08	40,20	50,16	60,01
$\bar{\varepsilon}$ Gurt [$\mu\text{m} / \text{m}$]	0	207	414	623	828	1029	1227
$\bar{\sigma}$ Gurt [KN / cm^2]	0	4,35	8,69	13,08	17,39	21,61	25,77

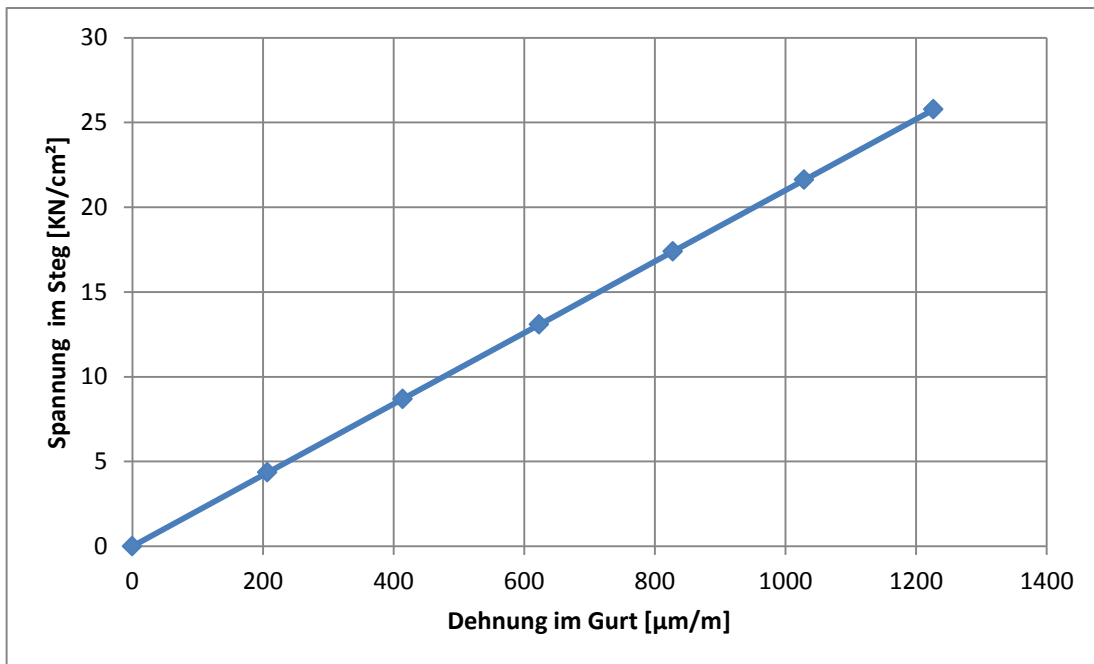


Diagramm 7 S-D-Diagramme DMS-Gurt

Die Spannungs-Dehnungs-Diagramme für Gurt und Steg zeigen jeweils einen linearen Verlauf. Ebenso wie das im einachsigen Zugversuch ermittelte Spannungs-Dehnungs-Diagramm für diesen Werkstoff nach Abbildung 2-1 ist der Hookesche-Bereich mit dem linearen Anstieg der Spannungen und Dehnungen zu erkennen. Somit bestätigt sich das linearelastische Verhalten für diesen Werkstoff. Weiterhin ist zu erkennen, dass die elastische Streckgrenze bereits deutlich überschritten wurde. Der Werkstoff befindet sich jedoch noch im elastischen Bereich. **Es wird festgestellt, dass der Versuchsaufbau sowie das statische System für die weiteren experimentellen Untersuchungen geeignet ist.**

3.4 Plastische Dehnungs-und Verformungsbestimmung

In dem nun folgenden elastisch-plastischen Versuch wird der Prüfling über seine Streckgrenze hinaus belastet. Die Belastung beginnt bei Null und wird ohne Unterbrechung bis zum Abbruch des Versuches aufgebracht.

3.4.1 Versuchsergebnisse Plastisch

In Tabelle 13 ist eine Auswahl der im Experiment ermittelten Dehnungen und Verformungen des Prüflings sowie die jeweilige Prüf-Zeit zusammengestellt. Eine komplette Auflistung der Messergebnisse ist im Anhang bzw. auf der CD-ROM enthalten. Die Auflistung der folgenden Tabelle ist bis zum Versagen des Gurt-DMS zusammengefasst.

Tabelle 13 Versuchsergebnisse Plastisch

Kraft F [kN]	ϵ_{Steg} [$\mu\text{m}/\text{m}$]	ϵ_{Gurt} [$\mu\text{m}/\text{m}$]	W [mm]	Zeit [s]
11,27	72	235	0,79	5,75
20,26	130	421	1,40	7,25
30,03	191	620	2,03	18,25
40,05	254	823	2,65	36,75
49,78	315	1019	3,25	55,25
60,06	379	1226	3,89	74,75
69,81	440	1423	4,46	95,75
79,77	501	1630	5,09	121,75
90,01	701	4853	5,93	146,25
90,14	915	6423	6,16	151,75
89,95	1261	7465	6,38	157,75
90,44	1590	8296	6,63	163,75
91,46	2013	9148	6,96	169,75
91,36	2544	9974	7,27	175,75
90,76	2995	10534	7,53	181,75
90,33	3389	11123	7,79	187,75
91,33	3728	11800	8,13	193,75
91,09	4060	12691	8,50	199,75
90,40	4304	13462	8,77	205,75
90,28	4484	14153	9,03	211,75
91,17	4664	14801	9,35	217,75
91,56	4832	15565	9,67	223,75
91,48	4948	16083	9,91	229,25
91,06	5028	16700	10,08	233,75

3.4.2 Versuchsauswertung Plastisch

Mit den Versuchsergebnissen soll der elastisch-plastische Versuch grafisch ausgewertet werden. Aus der Belastung und der resultierenden Verformung wurde das folgende Kraft-Verformungsdiagramm erstellt. Die Verformung wurde bis ca. 30mm messtechnisch erfasst, danach riss der verwendete Wegaufnehmer infolge der Verformung von seiner Befestigung.

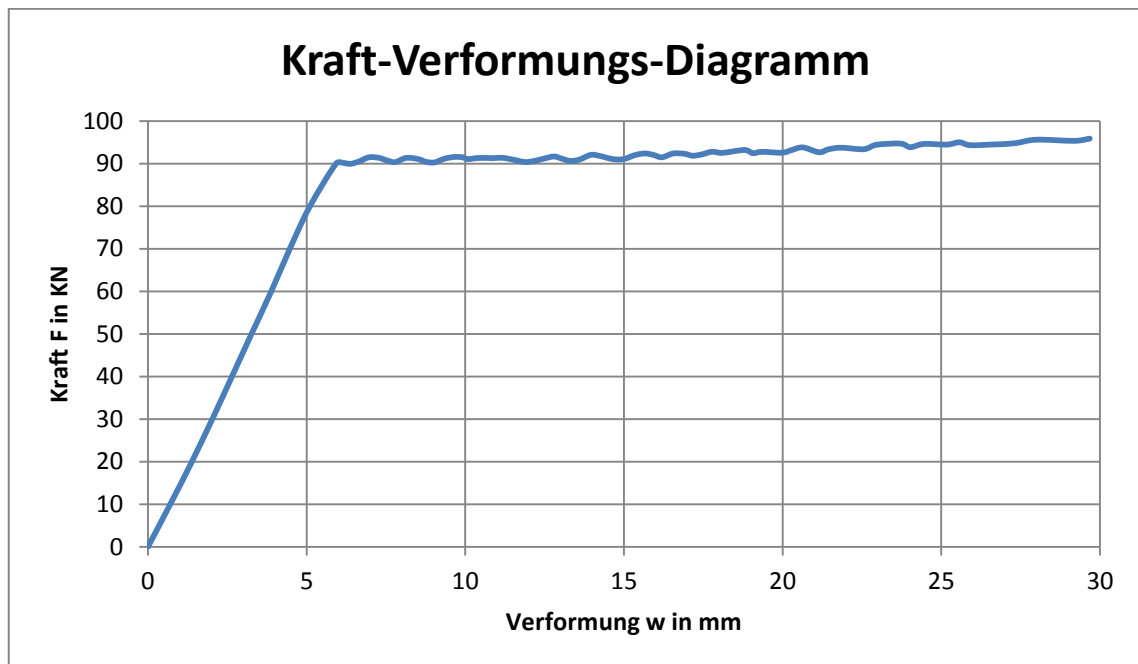


Diagramm 8 Kraft-Verformungs-Diagramm Plastisch

Das Kraft-Verformungs-Diagramm zeigt einen linearen Anstieg bis ca. 90 kN. Anschließend folgt ein Bereich einer scheinbar konstant bleibenden Kraft bis zu einer Verformung von ca. 15 mm. Im Anschluss nimmt die Kraft weiter zu. Das Diagramm zeigt anfangs eine rasche Zunahme der Kraft bei geringer Verformung. Ist die Streckgrenze erreicht, ist eine weitere Zunahme der Kraft mit einer zunehmend starken Verformung verbunden.

Die nachfolgenden während des Versuches aufgenommenen Bilder zeigen den Zustand des Trägers vor und nach Beendigung des Versuches.

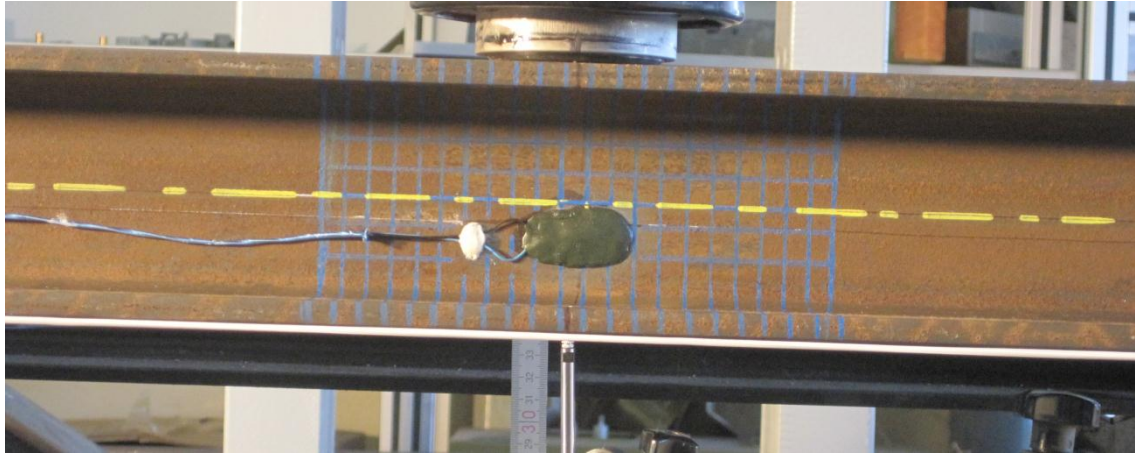


Abbildung 3-7 HEB100- Zustand bei Versuchsbeginn

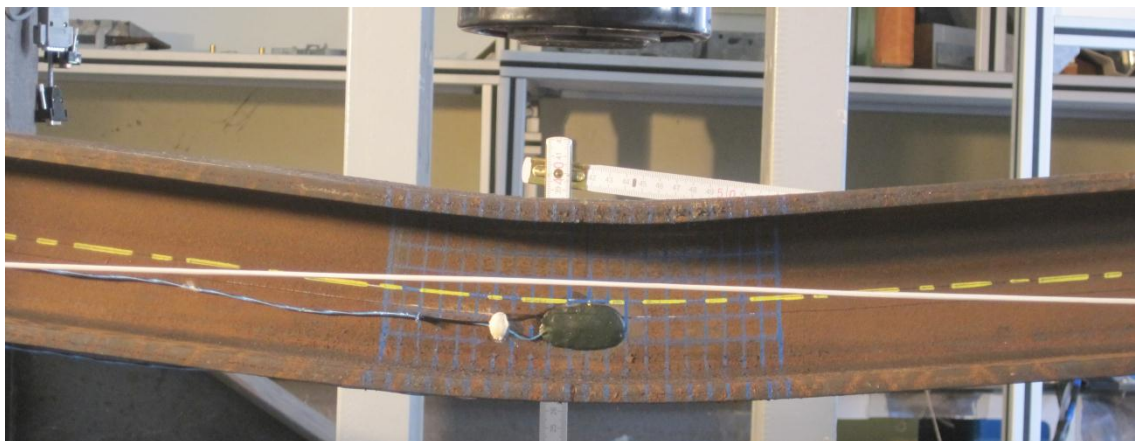


Abbildung 3-8 HEB100- Zustand nach dem Versuch

Abbildung 3-8 zeigt die bleibende Verformung nach dem Versuch. Gut zu erkennen ist die Verformung an der weißen Schnur. Diese wurde auf gleicher Höhe mit dem Untergurt gespannt. Nach Beendigung des Versuches wurde der Träger über die halbe Querschnittshöhe bleibend verformt.

Abbruch des Versuches:

Um Datenverlust zu vermeiden musste der Versuch nach 25 min beendet werden. Die Gesamtverformung beträgt 63mm.

Aus den Versuchsergebnissen wird nachfolgend ein Kraft-Dehnungs-Diagramm für Steg und Gurt erstellt. Es werden Dehnungen bis 3000 $\mu\text{m}/\text{m}$ berücksichtigt.

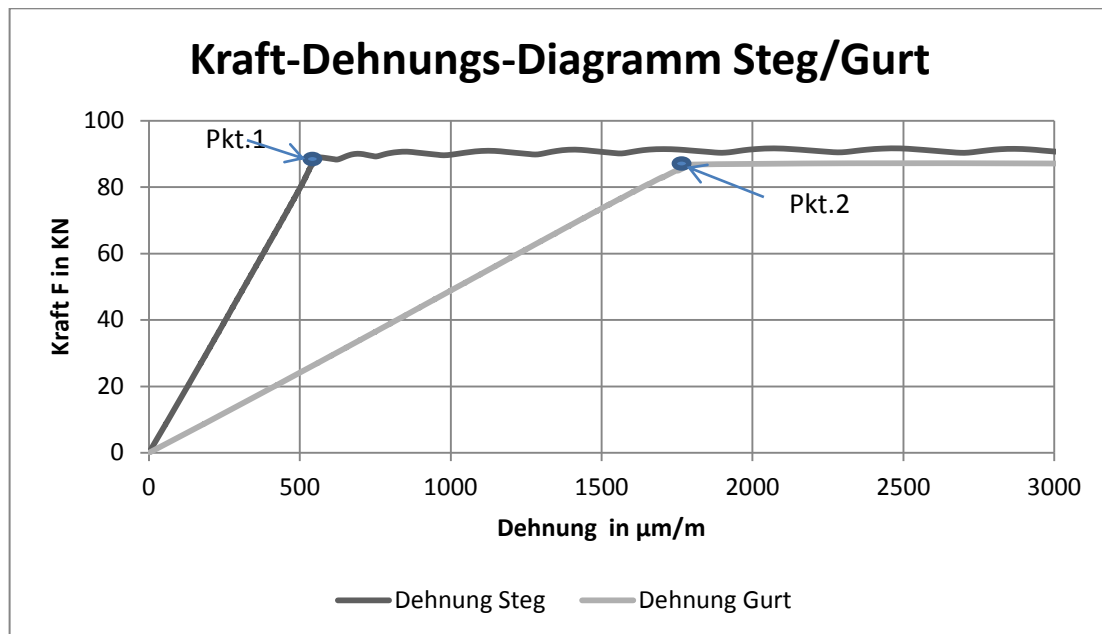


Diagramm 9 Kraft-Dehnungs-Diagramm Plastisch

Diagramm 9 zeigt einen linearen Anstieg beider Graphen bis zu einer wirkenden Kraft von ca. 90 kN, anschließend bleibt die Kraft konstant bei zunehmender Dehnung.

Dehnungsverlauf:

Der Verlauf der Dehnungen über die Höhe des Zugbereiches soll nachfolgend ermittelt werden. Dafür werden aus den Versuchsergebnissen die Messwerte aus dem in Diagramm 9 dargestellte Messpunkte gewählt.

Dehnungen im Steg: $\text{Pkt.1} : \varepsilon_1 = 517 \mu\text{m}/\text{m}$

Dehnungen im Gurt: $\text{Pkt.2} : \varepsilon_2 = 1710 \mu\text{m}/\text{m}$

(Die gewählten Punkte sind in den Messdaten unter Pkt.517, Pkt.1710 zu finden.)

-applizierten Höhen der DMS:

$$DMS_{(\text{Steg})} \Rightarrow z_1 = 15\text{mm}$$

$$DMS_{(\text{Gurt})} \Rightarrow z_2 = 50\text{mm}$$

Bei linearem Verlauf der Dehnungen müssten die Messungen diese Werte bestätigen.

$$\frac{\varepsilon_1}{z_1} = \frac{\varepsilon_2}{z_2} \quad (3.11)$$

mit $\varepsilon_1 = 517 \mu\text{m}/\text{m}$ und $\varepsilon_2 = 1710 \mu\text{m}/\text{m}$ und $z_2 = 50\text{mm}$

$$\frac{517 \mu\text{m}/\text{m}}{z} = \frac{1710 \mu\text{m}/\text{m}}{50\text{mm}} \Rightarrow z = \frac{50\text{mm} * 517 \mu\text{m}/\text{m}}{1710 \mu\text{m}/\text{m}}$$

$$\underline{z = 15\text{mm} = z_1}$$

- Dies entspricht der applizierten Höhe des DMS am Steg.
- **Der lineare Verlauf wurde bestätigt.**

Spannungsverteilung im Querschnitt:

Um das Verhalten der wirkenden Spannungen bei zunehmender Belastung beurteilen zu können, wird zunächst die Dehnung der Fließspannung ermittelt. Der Übergang vom elastischen zum plastischen setzt mit dem Erreichen der elastischen Grenzkraft ein. Die wirkenden Grenzkraften der verwendeten Werkstoffgesetze wurden in 3.2 ermittelt. Die entsprechenden Dehnungen werden dem Messprotokoll entnommen.

Elastische Grenzkraft nach idealelastischen Werkstoffgesetz:

$$F_{el} = 61,65\text{KN} \Rightarrow \begin{aligned} \varepsilon_{Gurt} &= 1255 \mu\text{m}/\text{m} \\ \varepsilon_{Steg} &= 388 \mu\text{m}/\text{m} \end{aligned}$$

Plastische Grenzkraft nach idealplastischen Werkstoffgesetz:

$$F_{pl} = 71,45\text{KN} \Rightarrow \begin{aligned} \varepsilon_{Gurt} &= 1456 \mu\text{m}/\text{m} \\ \varepsilon_{Steg} &= 450 \mu\text{m}/\text{m} \end{aligned}$$

Zur Veranschaulichung werden diese Werte im nachfolgenden Kraft-Dehnungs-Diagramm dargestellt.

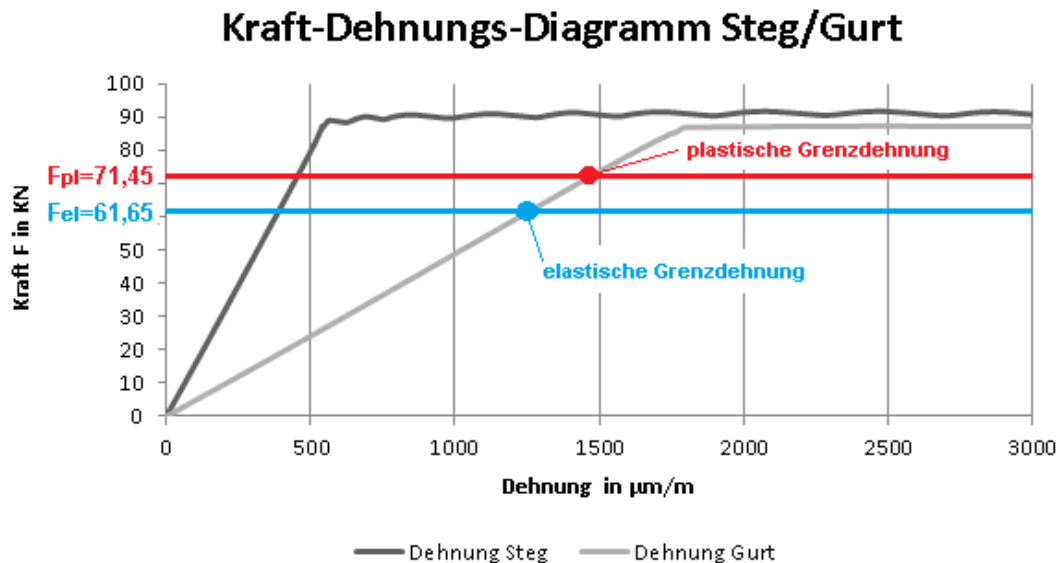


Diagramm 10 Kraft-Dehnungs-Diagramm mit F_{el} und F_{pl}

Das elastische Grenzbiegemoment ist erreicht, sobald eine Faser die Grenzspannung erreicht hat. Für den Versuchsträger ist der Spannungs- und Dehnungsverlauf für die Wirkung der Kraft F_{el} in der nachfolgenden Abbildung dargestellt.

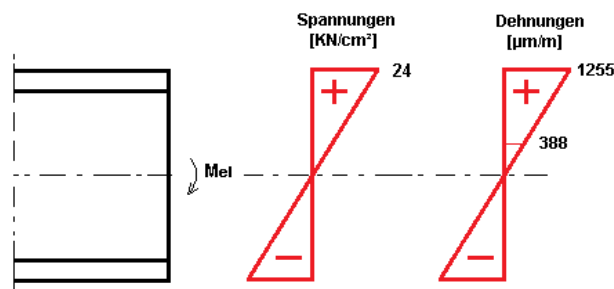


Abbildung 3-9 Spannungs- und experimenteller Dehnungsverlauf für M_{el}

Der angenommene elastische Spannungs- und Dehnungsverlauf wird durch die Versuchsergebnisse bestätigt.

Für das plastische Grenzbiegemoment wird der nach Abbildung 3-10 dargestellte Spannungs-und Dehnungs-Verlauf angenommen.

Mit dem Erreichen der Grenzspannung in den Randfasern tritt ein Plastizieren in das Innere ein. Die Spannung bleibt dabei konstant. Im Grenzzustand sind alle Fasern in der Biegezug-und Biegedruckzone plastiziert.

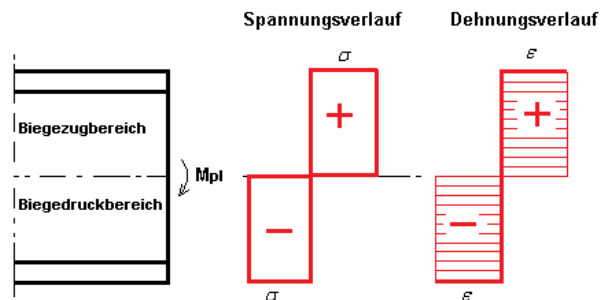


Abbildung 3-10 Idealplastischer Spannungs-Dehnungs-Verlauf für M_{pl}

Diesem Spannungszustand entsprechen konstante Spannungen und Dehnungen sowie ein Dehnungs- und Spannungssprung in der Spannungsnulllinie [12].

Diese Annahme ist nicht möglich, dies haben die Versuchsergebnisse gezeigt. Der tatsächliche Verlauf der Spannungsverteilung wird in der nachfolgenden Abbildung gezeigt.

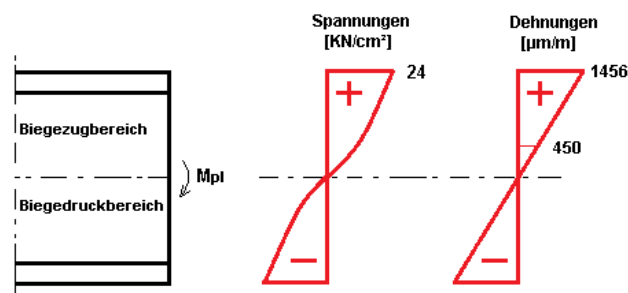


Abbildung 3-11 Spannungs-und experimenteller Dehnungsverlauf für M_{pl}

Der Dehnungsverlauf entspricht den Messergebnissen nach Diagramm 10. Die entsprechenden Spannungen können anhand der Werkstoffgesetze des Spannungs-Dehnungs-Diagrammes ermittelt werden.

3.5 Auswertung der Messergebnisse und analytischen Berechnung

Im Folgenden werden die Berechnungen nach dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm mit den Versuchsergebnissen der plastischen Dehnungs-und Verformungsmessung bewertet.

Es soll überprüft werden ob, das plastische Grenzbiegemoment für den verwendeten Versuchsträger erreicht werden konnte. Zur Veranschaulichung wird ein Kraft-Verformungs-Diagramm aus den Messergebnissen erstellt.

Während der Versuchsdurchführung versagte der Wegaufnehmer bei einer Verformung von ca. 30mm. Die Verformungen wurden folglich von Hand gemessen. Im folgenden Diagramm ist die Verformung ab dem Versagen des Wegaufnehmers bis zum Abbruch des Versuches gelblich dargestellt.

Die maximal im Experiment erreichte Kraft beträgt:

$$F_{\max} = 107 \text{ KN}$$

Die maximale ermittelte Verformung beträgt:

$$w_{\max} = 63 \text{ mm}$$

Berechnung der plastischen Grenzkraft nach linearem Werkstoffgesetz:

Bilineare Näherung:

In 2.3.3 wurde nach bilinearem Werkstoffgesetz ein maximales Biegemoment von:

$M_{pl,20} = 35,41 \text{ KNm}$ berechnet. Die plastischen Grenzkraft beträgt nach:

$$(3.1) \quad F = \frac{M * 4}{l}$$

mit $M_{pl,20} = 35,41 \text{ KNm}$ und $l = 1,4 \text{ m}$

$$F_{20} = \frac{35,41 * 4}{1,40} \text{ [KN]}$$

$$F_{20} = 101 \text{ KN}$$

$$F_{20} = 101 \text{ KN} < F_{\max} = 107 \text{ KN}$$

Die berechnete Grenzkraft kann durch den praktischen Versuch bestätigt werden. Das Biegemoment $M_{pl,20}$ nach 2.3.3 wurde somit im Versuch erreicht. Die Berechnung wurde durch den praktischen Versuch für diesen Versuchsträger bestätigt.

Berechnung der plastischen Grenzkraft nach nichtlinearem Werkstoffgesetz:

Approximation nach Ludwik:

In 2.3.6 wurde ein maximales Biegemoment von:

$M_{pl,20} = 36,70 \text{ KNm}$ berechnet. Die plastische Grenzkraft beträgt:

$$(3.1) \quad F = \frac{M * 4}{l}$$

mit $M_{pl,20} = 36,70 \text{ KNm}$ und $l = 1,4 \text{ m}$

$$F_{20} = \frac{36,70 * 4}{1,40} \text{ [KN]}$$

$$\underline{F_{20} = 105 \text{ KN}}$$

$F_{20} = 105 \text{ KN} < F_{\max} = 107 \text{ KN}$

Die berechnete Grenzkraft kann durch den praktischen Versuch bestätigt werden. Das Biegemoment $M_{pl,20}$ nach 2.3.6 wurde somit im Versuch erreicht. Die Berechnung wurde durch den praktischen Versuch für diesen Versuchsträger bestätigt.

Das folgende Diagramm zeigt die Verformung des Versuchsträgers bis zum Abbruch des Experimentes.

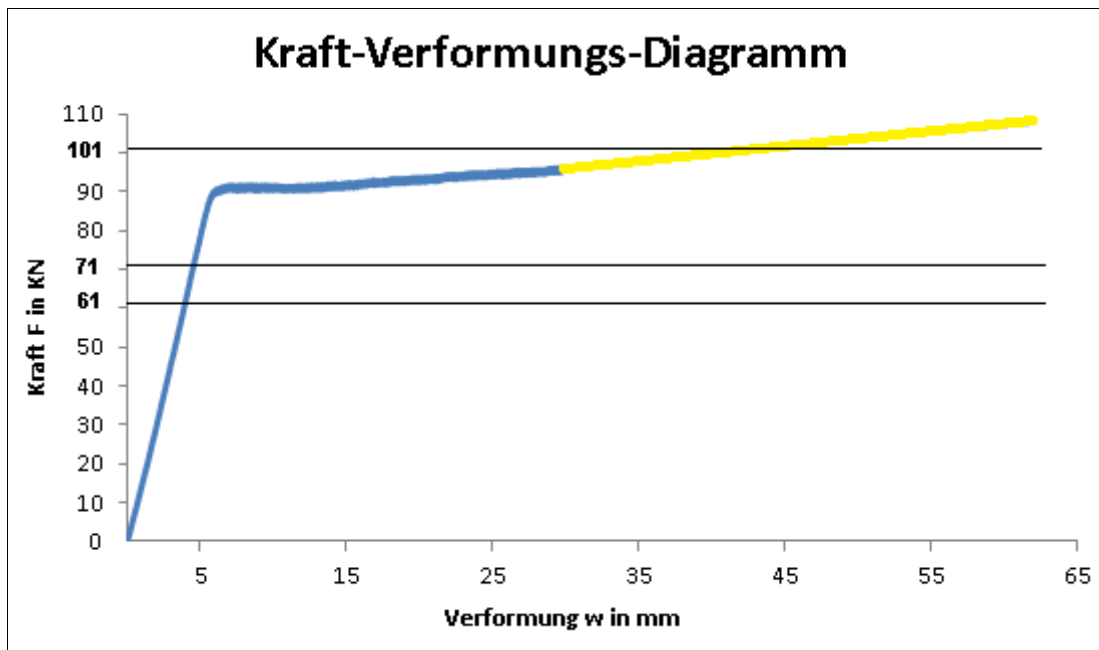


Diagramm 11 Kraft-Verformungs-Diagramm Plastisch

Die wirkenden Kräfte der Grenzbiegemomente sind durch horizontale Linien im Diagramm gekennzeichnet.

$$F_{el} = 61,65 \text{ kN} \Rightarrow w \approx 4 \text{ mm}$$

$$F_{pl} = 71,45 \text{ kN} \Rightarrow w \approx 5 \text{ mm}$$

$$F_{20} = 101 \text{ kN} \Rightarrow w > 30 \text{ mm}$$

Die nach dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm berechneten Biegemomente für die linearen und nichtlinearen Näherungen konnten im praktischen Versuch bestätigt werden. Das Erreichen der Grenzkraft ist dabei mit starken Verformungen verbunden.

Rechnerische Auswertung:

Die Berechnung nach dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm ergibt eine Ausnutzung gegenüber dem plastischen Grenzbiegemoment von

$$\alpha_{pl} = \frac{M_{pl,20}}{M_{pl,k}} = \frac{35,41}{25,01} = 1,42$$

4 Analyse mittels FEM-Programm

Methode der Finiten Elemente (FEM):

Ziel einer FEM-Berechnung ist die Analyse von Bauteilen, die durch äußere und thermische Belastungen beansprucht werden. Dabei wird das Bauteil anhand von verschiedenen geometrischen Elementen (z.bsp.Knoten, Linien, Flächen Volumen) gebildet. Gleichgewichts- und Bewegungsgleichungen der Strukturelemente (Finite-Elemente) werden dabei entwickelt und anschließend gelöst. Je feiner dabei Netzverdichtung ist desto genauer werden die Berechnungen. Mittels der Analyse können unter anderem lokale Dehnungen, Spannungen, Temperaturverteilung oder Schwingungsmethoden beurteilt werden.

Die folgenden Berechnungen werden mit dem FEM- Programm ANSYS durchgeführt. Der prinzipielle Ablauf gliedert sich in folgende Bereiche.

Pre-Processing:	<ul style="list-style-type: none">• Geometriemodellierung• Vernetzung• Formulierung der Randbedingungen
Solution:	<ul style="list-style-type: none">• Numerische Berechnung des (Anfangs-) Randwertproblems
Post-Processing:	<ul style="list-style-type: none">• Darstellung der Ergebnisse• Berechnung von abgeleiteten Größen• Auswertung der Berechnungen

Das Programm ANSYS ist in zwei Versionen erhältlich.

- ANSYS-Classic Eingaben durch Befehle
- ANSYS- Workbench Eingaben über grafische Oberfläche

Für die folgenden Analysen wird die Version ANSYS-Workbench2.0 Framework Version 13.0.0 verwendet. WORKBENCH ist ein Programm, welches aus verschiedenen Modulen besteht, die in einem Projekt zusammengefasst werden. Die Bedienung über eine grafische Oberfläche ist dabei wesentlich komfortabler als in ANSYS-Classic.

4.1 Modellierung des Versuchsträgers

Im ersten Schritt erfolgt die Modellierung des Trägers in ANSYS-Workbench, hierfür wird im Skizzier-Modus eine Skizze des Versuchsträgers erstellt und anschließend im Modellier-Modus mit unterschiedlichen Operationen aus den Flächen die entsprechenden Teile bzw. Volumen modelliert.

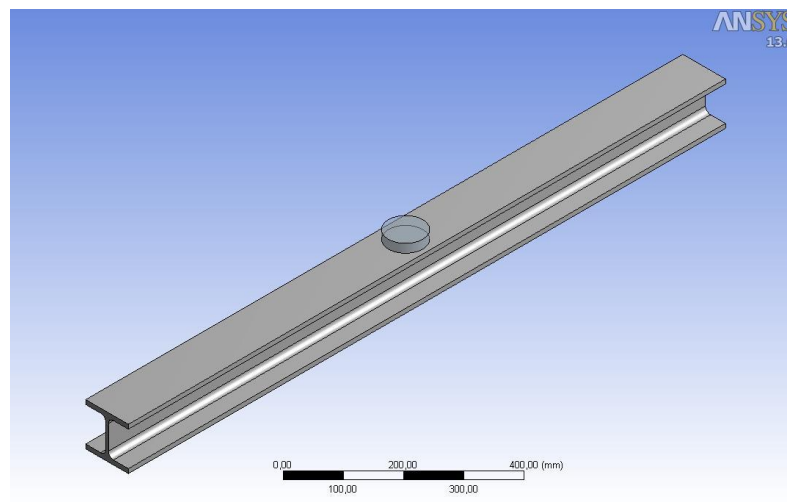


Abbildung 4-1 Model HEB100

In Abbildung 4-1 ist der modellierte Versuchsträger der experimentellen Dehnungs- und Verformungsbestimmung dargestellt. Der Querschnitt wurde entsprechend der DIN1025-2 modelliert. Die Länge entspricht der Stützweite $l = 1400\text{mm}$. Die Krafteinleitung im Experiment erfolgte über einen Hydraulikzylinder mit einem Stempeldurchmesser von 80mm. Um das Experiment möglichst genau zu simulieren, wurde dieser Stempel durch ein weiteres Bauteil in ANSYS modelliert und dient der Krafteinleitung. Der Übergangsbereich zwischen Stempel und Träger ist dabei kritisch zu betrachten. Dieser muss als Kontaktfläche modelliert werden, da sich sonst die beiden Körper durchdringen [13].

4.1.1 FE-Netz Generierung

Die FE-Modellvernetzung hat das Ziel, ein möglichst gleichmäßiges Netz auf die relevante Geometrie zu erstellen. Für die Modellierung wurde eine Kantenlänge von 10mm gewählt. Die nachfolgende Abbildung zeigt das generierte FE- Netz.

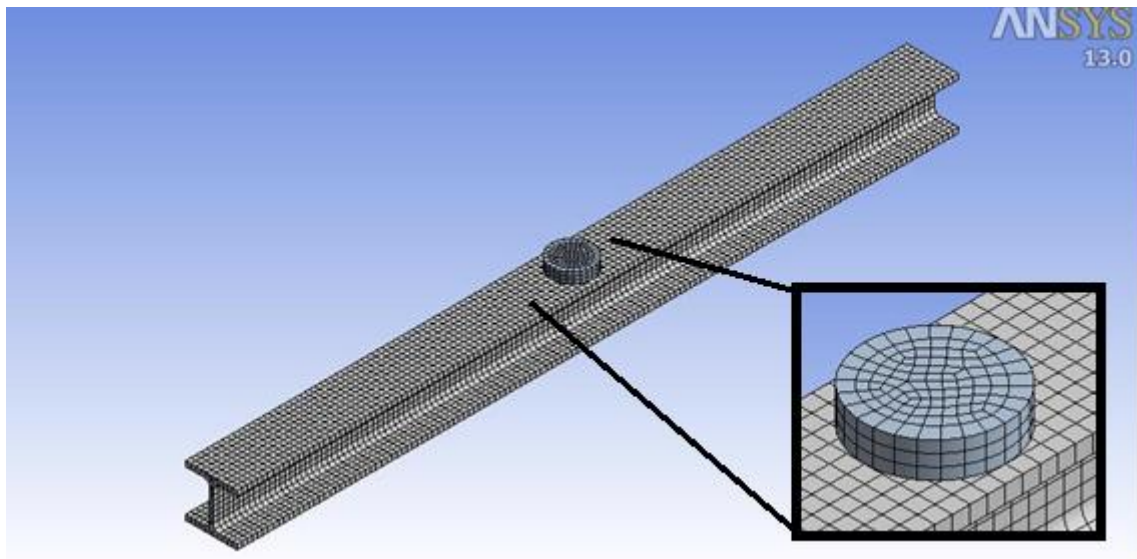


Abbildung 4-2 FE-Netz komplett mit Detailansicht

4.1.2 Belastung und Randbedingungen

Die am Bauteil angreifenden äußeren Kräfte und Restriktionen werden durch die Randbedingungen festgelegt. Die nachfolgende Abbildung zeigt die Position der Lagerung und Krafteinleitung. Die Lagerung wurde mit einer „Verschiebung“ an den äußeren Gurtkanten modelliert und die Verschiebung in Kraftrichtung verhindert.

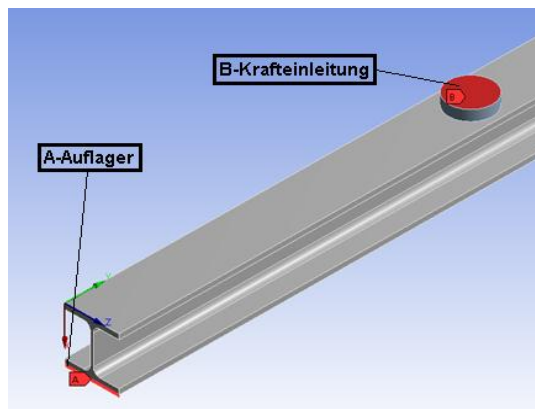


Abbildung 4-3 Randbedingungen

4.1.3 Überprüfung der Struktur und Randbedingungen

Die Modellierung des Trägers sowie die Verwendung der eingestellten Randbedingungen sollen nun überprüft werden. Der modellierte Träger wird dabei mit einer Kraft F belastet und die Verformungen berechnet. Anschließend wird die FEM-Berechnung mit der analytischen verglichen. Dies dient der überschlägigen Kontrolle der FEM-Berechnung. Die Abweichungen sollten hier bei guter Modellierung entsprechend gering ausfallen. Größere Abweichungen lassen auf falsche Materialkonstanten bzw. fehlerhafte Modellierung schließen. Für die Berechnungen werden die in der experimentellen Spannungs- und Dehnungsbestimmung ermittelten Messergebnisse der Versuchsergebnisse Versuch1 „Elastisch“ siehe Tabelle 8 verwendet.

F in KN	w in mm
19,44	1,44
30,23	2,15
40,09	2,78
50,05	3,41
59,97	4,03

Nachfolgend ist die berechnete Verformung der Kraft $F = 30,23 \text{ KN}$ dargestellt. Die minimale und maximale Durchbiegung ist gekennzeichnet.

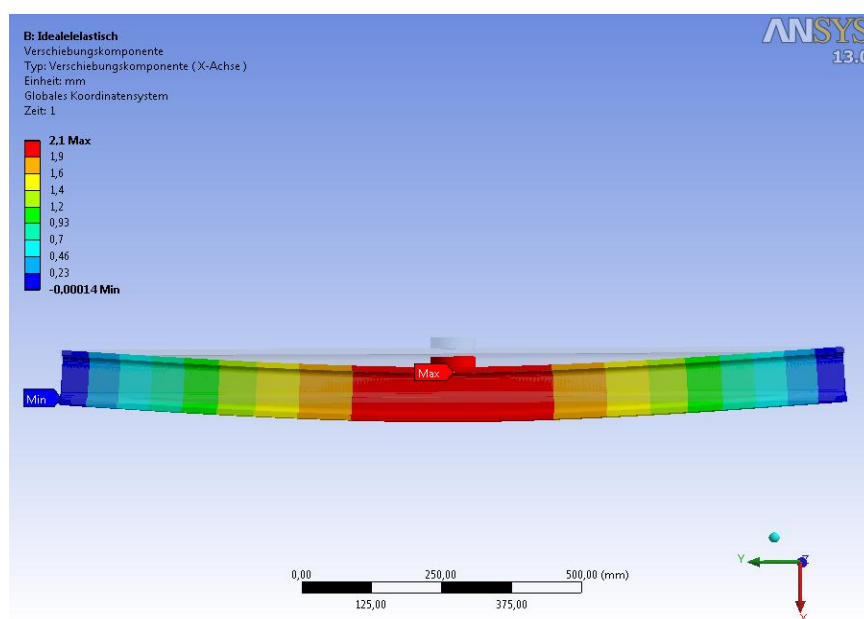


Abbildung 4-4 Verschiebung in X

Vergleich der Berechnungen:

Versuch 1 -Elastisch-		ANSYS-Analyse
F in KN	w in mm	max w in mm
19,44	1,44	1,34
30,23	2,15	2,09
40,09	2,78	2,77
50,05	3,41	3,45
59,97	4,03	4,14

Die Berechnungen mit ANSYS liefern mit maximal 3% Abweichung von den experimentellen Werten sehr gute Ergebnisse. Das generierte Modell wurde somit überprüft.

4.2 Analyse der Werkstoffgesetze am Versuchsträger

Die Analyse des Versuchsträgers wird für folgende Werkstoffgesetze geführt.

- Idealelastische Werkstoffgesetz und M_{el}
- Idealelastisch-plastisches Werkstoffgesetz und M_{pl}
- Bilineare Werkstoffgesetz und $M_{pl,20}$

Die Berechnung umfasst folgende Analysen:

Analyse	Beschreibung
• Normalspannung	Bestimmung der Spannungen in Trägerlängsachse
• Vergleichsspannung	Bestimmung der Spannung nach Mises
• Gesamtverformung	Verformung in Kraftrichtung
• Linearisierte Normalspannung DMS-	Normalspannung in Trägerlängsrichtung an der Messstelle des DMS-Steg
• Linearisierte Normalspannung DMS-Steg	Normalspannung in Trägerlängsrichtung an der Messstelle des DMS-Gurt

Die elastische Grenzkraft nach idealelastischem Werkstoffgesetz:

nach (3.8)
$$F = \frac{M * 4}{l}$$

mit: $M_{el,y,k} = 21,58KNm$ und $l = 1,4m$

$$\underline{F = 61,65KN}$$

Die plastische Grenzkraft nach idealplastischem Werkstoffgesetz:

(3.8)
$$F = \frac{M * 4}{l}$$

mit $M_{pl,y,k} = 25,01KNm$ und $l = 1,4m$

$$F = \frac{25,01 * 4}{1,40} [KN]$$

$$\underline{F = 71,45KN}$$

Das bilineare Werkstoffgesetz:

nach 2.3:
$$\underline{M_{pl,20} = 35,41KNm}$$

Die benötigte Kraft beträgt:

(3.8)
$$F = \frac{M * 4}{l}$$

mit $M_{pl,20} = 35,41KNm$ und $l = 1,4m$

$$F = \frac{35,41 * 4}{1,40} [KN]$$

$$\underline{F = 101KN}$$

4.2.1 Analyse nach idealelastischem Werkstoffgesetz

In den folgenden Abbildungen werden die Analysen der ANSYS-Berechnungen nach dem idealelastischen Werkstoffgesetz dargestellt und erläutert. Die Beschreibungen der Analysen beziehen sich auf den maximal verformten Bereich, dabei werden die Ergebnisse der Berechnungen farblich in den Abbildungen angezeigt.

Werkstoffgesetz und Parameter:

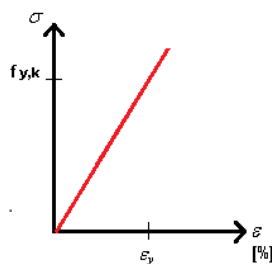
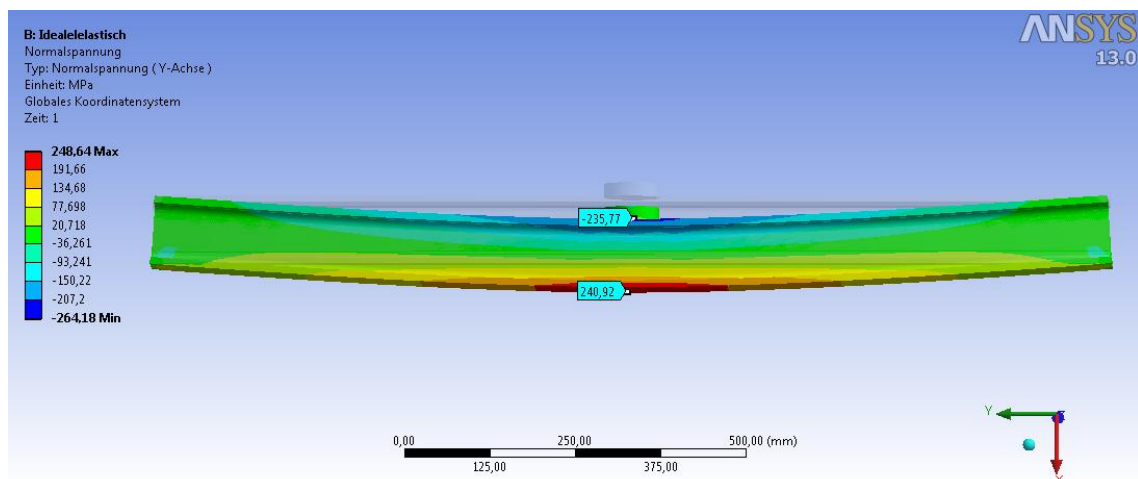


Abbildung 1-1b)

- $f_{y,k} = 240 \text{ N} / \text{mm}^2$
- $M_{el,y,k} = 21,58 \text{ KNm} \Rightarrow F = 61,65 \text{ KN}$
- $E = 210000 \text{ N} / \text{mm}^2$

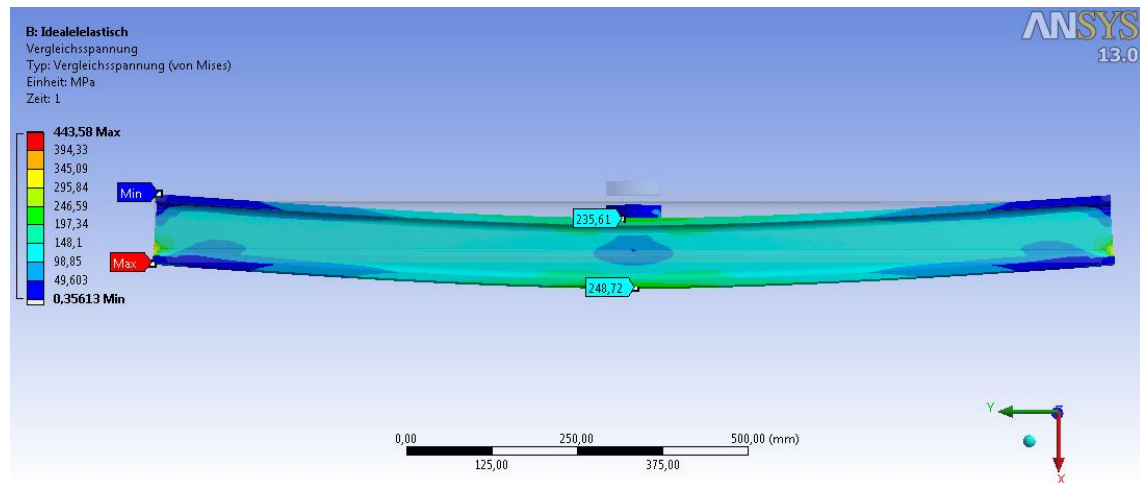
Analyse der Normalspannungen:



FEM-Analyse 1 Normalspannung Mel

Die maximalen Normalspannungen im Zug- und Druckbereich in den Randfasern des Trägers betragen ca. 240 N/mm^2 . Die Markierungen in den Abbildungen bezeichnen die maximalen Spannungswerte im Bereich der Krafteinleitung.

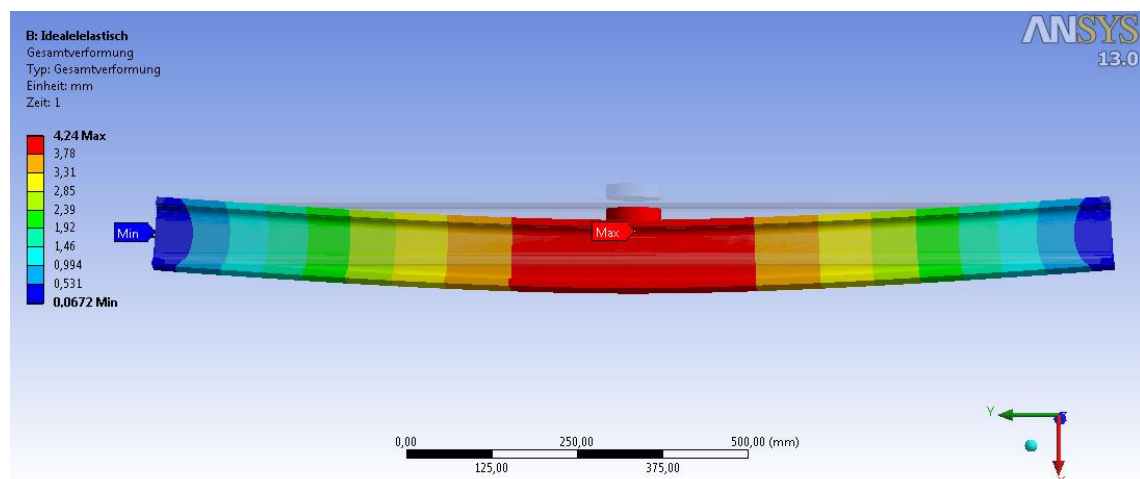
Analyse der Vergleichsspannung:



FEM-Analyse 2 Vergleichsspannung Mel

Die Vergleichsspannung zeigt ebenfalls im Bereich der Krafteinleitung in den Randfasern Normalspannungen um 240 N/mm^2 . Die maximalen Vergleichsspannungen befinden sich hier an den Auflagern. Die Stützungen im Modell sollten bei Analysen im Bereich der Lagerung daher überprüft werden.

Analyse der Verformung:



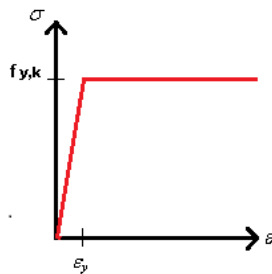
FEM-Analyse 3 Gesamtverformung Mel

Die Gesamtverformung beträgt ca. 4mm in dem rot dargestellten Bereich. Die maximale und minimale Verformung ist mit Markierungen in der Abbildung versehen.

4.2.2 Analyse nach elastisch-idealplastischem Werkstoffgesetz

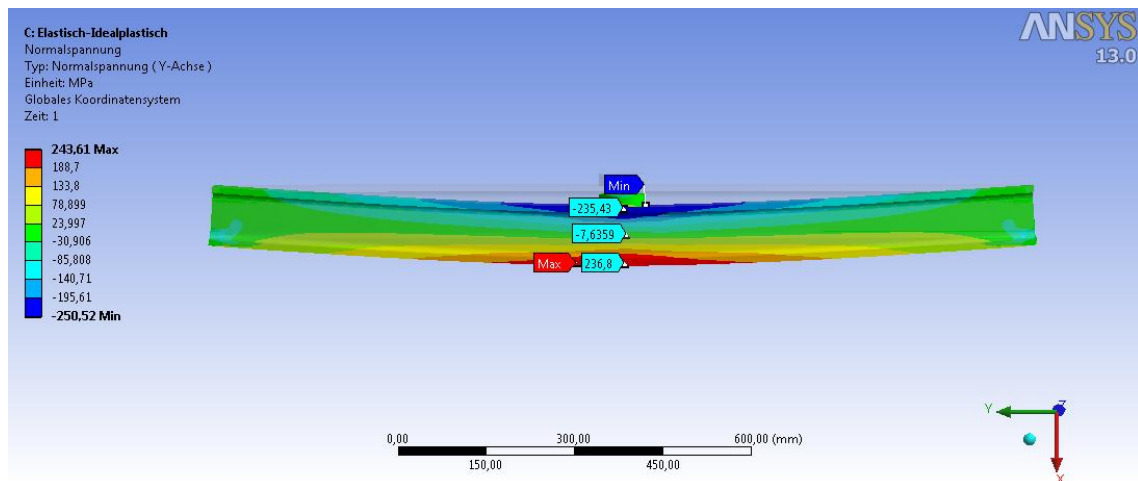
In den folgenden Abbildungen werden die Analysen der ANSYS-Berechnungen nach dem elastisch-idealplastischen Werkstoffgesetz dargestellt und erläutert. Die Beschreibungen der Analysen beziehen sich auf den maximal verformten Bereich, dabei werden die Ergebnisse der Berechnungen farblich in den Abbildungen angezeigt.

Werkstoffgesetz und Parameter:



- $f_{y,k} = 240 \text{ N/mm}^2$
- $M_{pl,y,k} = 25,01 \text{ KNm} \Rightarrow F = 71,45 \text{ KN}$
- $E = 210000 \text{ N/mm}^2$
- $E_v = 0$

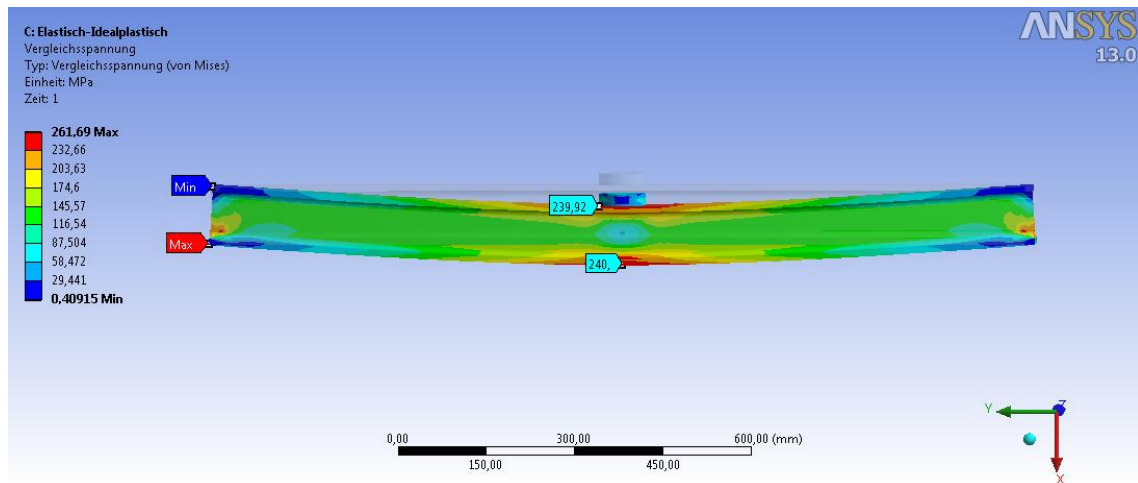
Normalspannungen:



FEM-Analyse 4 Normalspannungen Mpl

Die maximalen Normalspannungen wirken im Bereich der Krafteinleitung in den Randfasern. Der rote und blaue Bereich kennzeichnet die Fließzonen im Querschnitt. Die Spannungen betragen hier ca 240 N/mm^2 . Die Ausbreitung der Fließzonen begrenzt sich auf die Gurtbereiche. Die Ausbreitung in den Randbereichen beträgt ca. 300 mm .

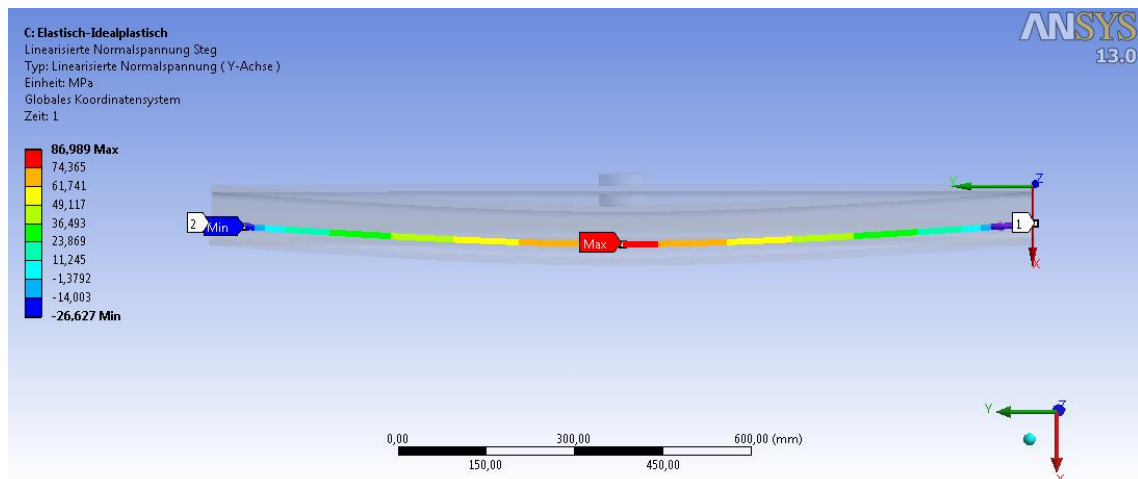
Vergleichsspannungen:



FEM-Analyse 5 Vergleichsspannung Mpl

Die maximale Vergleichsspannung in den Randfasern im Bereich der Krafteinleitung sind ca. 240 N/mm^2 . In der Abbildung sind diese mit Markierungen versehen. Ebenfalls gut zu erkennen ist die Ausbreitung der Fließzonen rot/orange, die sich auf die Gurtflächen begrenzen. Fast im kompletten Stegbereich, hier grünlich dargestellt, wirkt eine Spannung um 130 N/mm^2 .

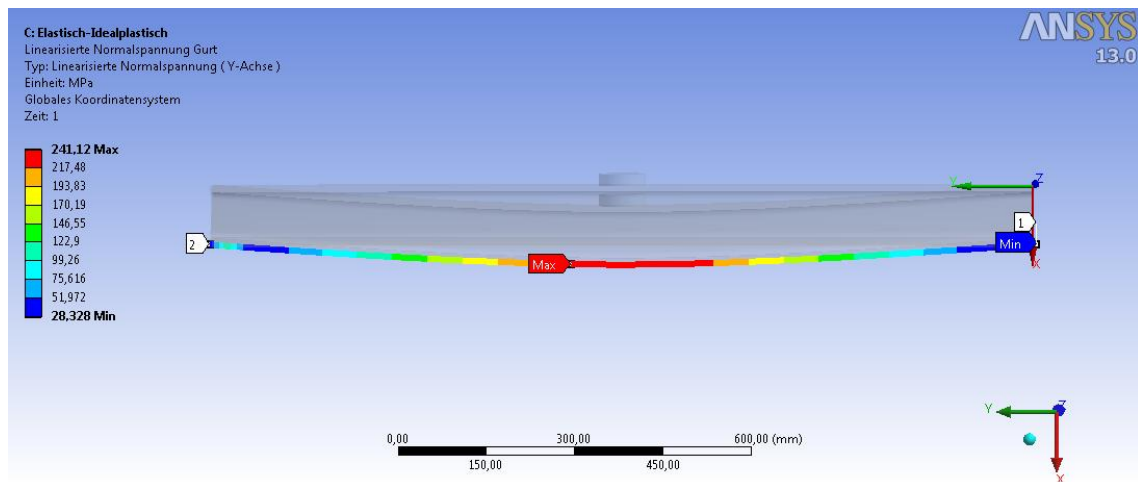
Linearisierte Normalspannung Steg:



FEM-Analyse 6 Linearisierte Normalspannung Steg Mpl

Die Spannung am DMS Steg ca. 15 mm unterhalb der neutralen Faser im Zugbereich beträgt 87 N/mm^2 .

Linearisierte Normalspannung DMS-Gurt:



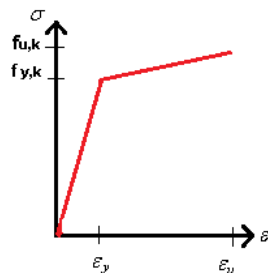
FEM-Analyse 7 Linearisierte Normalspannung Gurt Mpl

Die Spannung am DMS Gurt beträgt 241 N/mm^2 . Gut zu erkennen ist die Ausbreitung der Fließzone im Randbereich.

4.2.3 Analyse nach bilinearem Werkstoffgesetz mit linearer Verfestigung

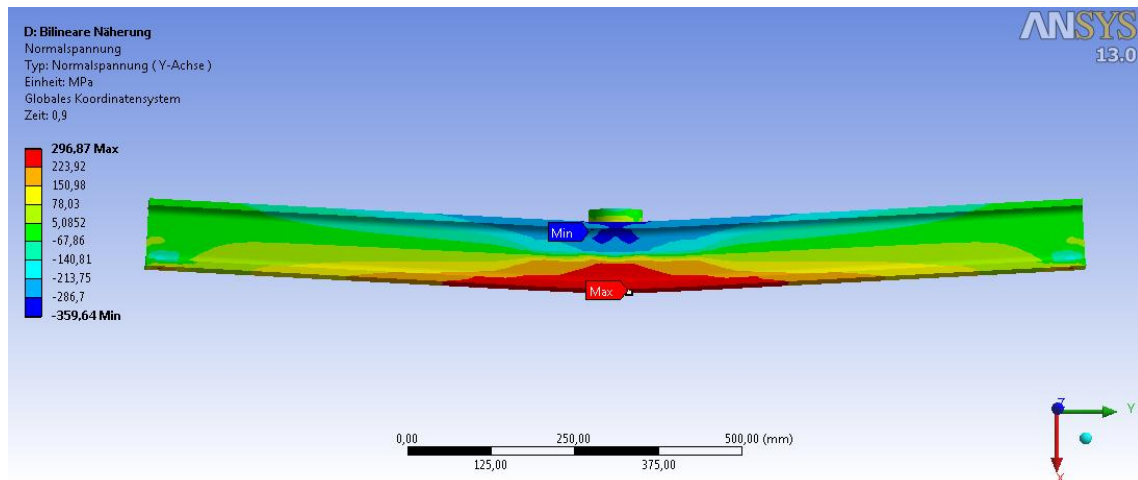
In den folgenden Abbildungen werden die Analysen der ANSYS-Berechnungen nach bilinearem Werkstoffgesetz dargestellt und erläutert. Die Beschreibungen der Analysen beziehen sich auf den maximal verformten Bereich, dabei werden die Ergebnisse der Berechnungen farblich in den Abbildungen angezeigt.

Werkstoffgesetz und Parameter:



- $f_{y,k} = 240 \text{ N/mm}^2$; $\varepsilon_F = 0,11\%$
- $f_{u,k} = 360 \text{ N/mm}^2$; $\varepsilon_u = 20\%$
- $M_{y,20} = 35,41 \text{ KNm} \Rightarrow F = 101 \text{ KN}$
- $E_v = 603 \text{ N/mm}^2$

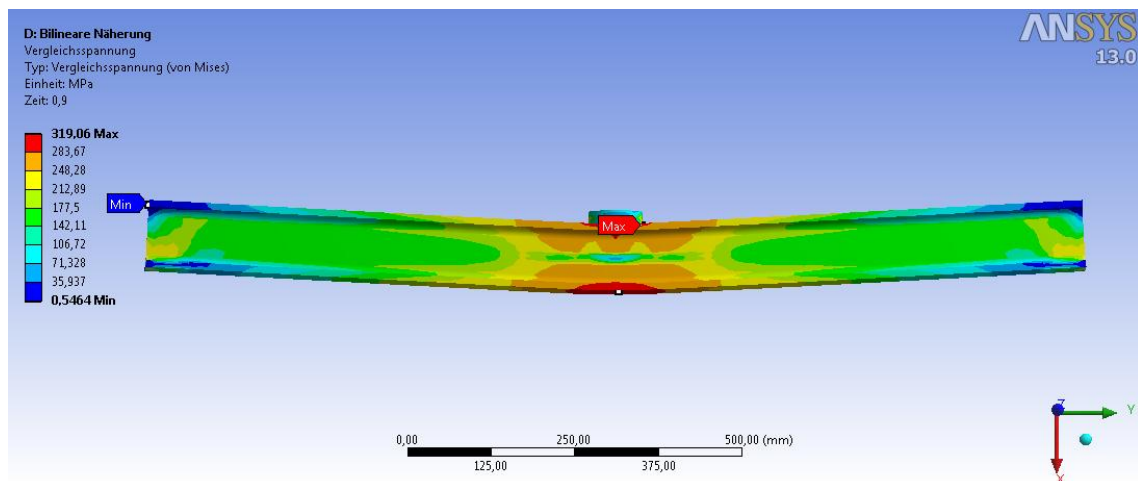
Normalspannung:



FEM-Analyse 8 Normalspannungen Mpl20

Die maximalen Normalspannungen wirken im Bereich der Krafteinleitung mit ca. 300-360 N/mm². Die Ausbreitung der Fließbereiche (Rot und Blau dargestellt) reicht von den Randfasern bis zur Trägermitte. Die Ausbreitung im Randbereich beträgt ca. 500 mm.

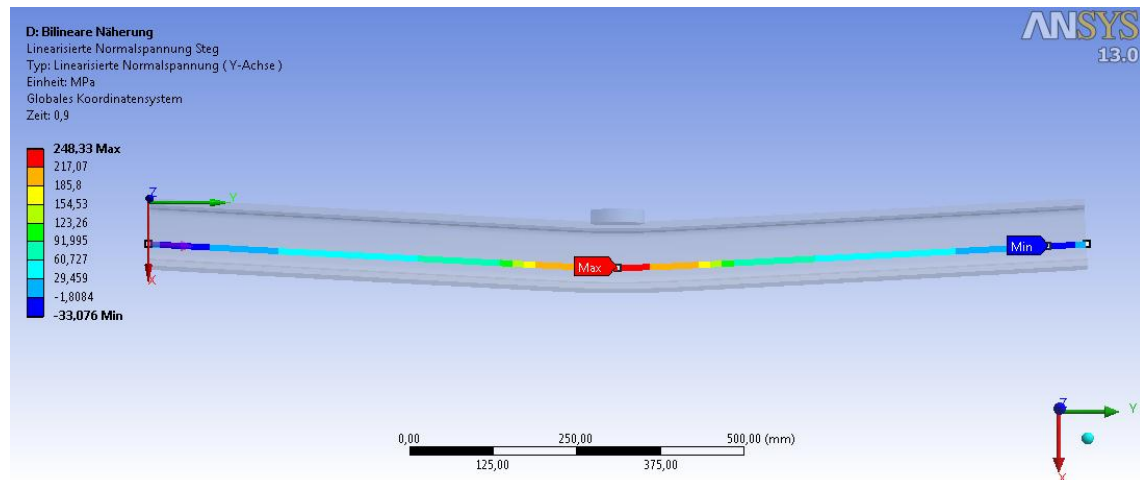
Vergleichsspannung:



FEM-Analyse 9 Vergleichsspannung Mpl20

Die minimale und maximale Vergleichsspannung ist in der Abbildung markiert. Die maximale Vergleichsspannung im Randbereich der Krafteinleitung beträgt ca. 320 N/mm². Gut zu erkennen ist die Ausbreitung des Fließbereiches vom Steg zur Trägermitte. Nahezu der gesamte Mittelbereich, auf eine Breite von ca. 250 mm, besitzt eine Spannung von 240 N/mm²-280 N/mm². Im Randbereich beträgt die Ausbreitung der Fließzonen ca. 300 mm.

Linearisierte Normalspannung DMS-Steg:



FEM-Analyse 10 Linearisierte Normalspannung Steg Mpl20

Die Spannung am DMS Steg ca.15mm unterhalb der neutralen Faser beträgt 248 N/mm². Die Fließzone ist rot dargestellt.

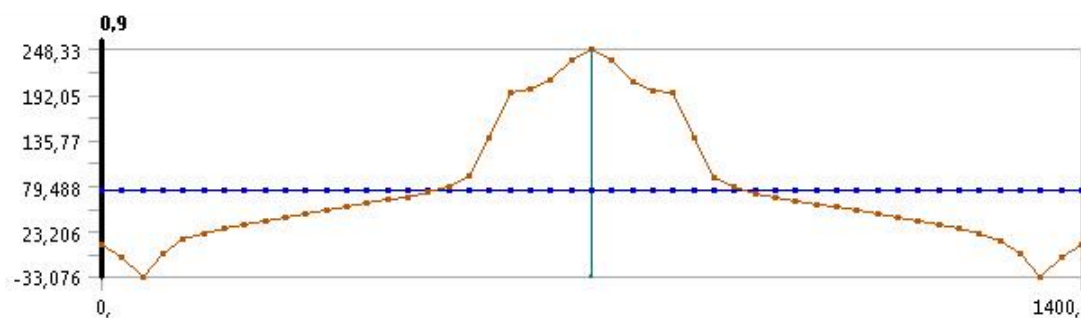
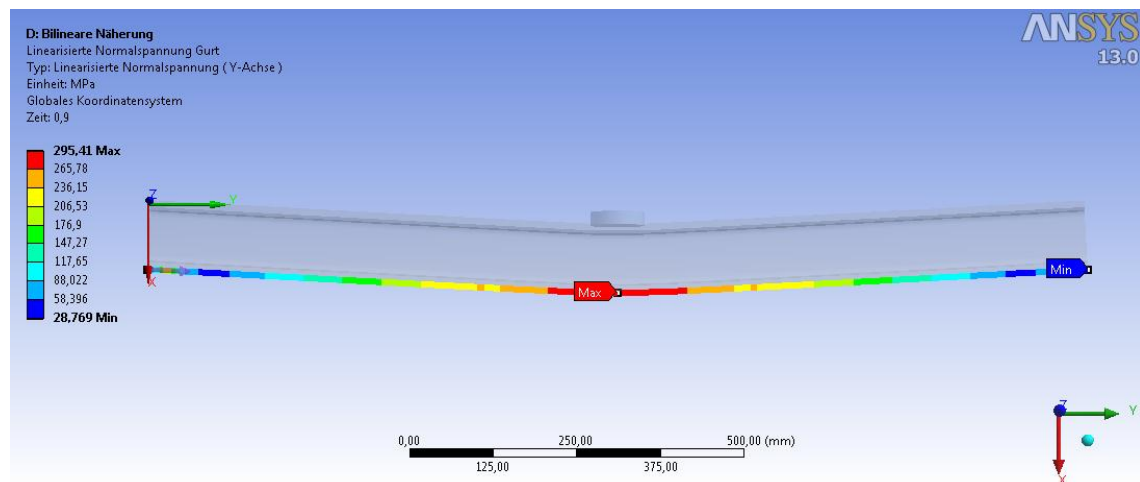


Diagramm 12 Linearisierte Normalspannung DMS-Steg

Die linearisierte Auswertung zeigt den Verlauf der Spannungen entlang eines Pfades am DMS-Steg. In der Abbildung ist der Verlauf braun dargestellt. Die Spannungen nehmen von den Auflagerpunkten in Richtung der Trägermitte leicht zu. Im Mittelbereich hingegen, je ca.250mm von der Trägermitte nehmen die Spannungen bis zu ihrem Maximum zu.

Linearisierte Normalspannung DMS- Gurt:



FEM-Analyse 11 Linearisierte Normalspannung Gurt Mpl20

Die Spannung am DMS Gurt beträgt ca.300N/mm. Die Ausbreitung der Fließzone beträgt ca.350mm in den Randfasern. In der Abbildung ist dies rot/orange dargestellt.

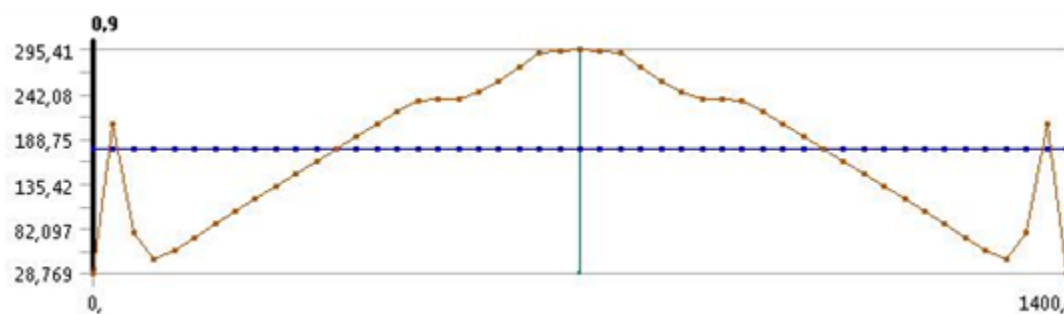


Diagramm 13 Linearisierte Normalspannung DMS-Gurt

Die linearisierte Normalspannung am Gurt zeigt einen gleichförmigen Anstieg der Spannungen 242N/mm² anschließend folgt ein Fließbereich konstanter Spannung und ein weiterer Anstieg bis zum Maximum.

4.3 Zusammenfassung der ANSYS-Analysen

Idealelastisches Werkstoffgesetz:

Die Spannungen an der maximal beanspruchten Stelle haben die elastische Grenzspannung erreicht (FEM-Analyse 1). Die maximalen Verformungen betragen hierbei ca.4mm, dies entspricht den analytischen Berechnungen nach 3.2.

Es wird festgestellt:

- Übereinstimmung der FEM- Analyse mit den analytischen Berechnungen sowie der experimentellen Dehnungs-und Verformungsbestimmung nach 3.3.1.
- Der Spannungsverlauf entspricht dem nach Elastizitätstheorie angenommen Verlauf.

Idealplastisches Werkstoffgesetz:

Die Spannungen erreichen im Bereich der Lasteinwirkung die Fließgrenze (FEM-Analyse 4). Dieser Bereich begrenzt sich auf die Randfasern in den Gurtbereichen.

Es wird festgestellt:

- Querschnitt plastiziert nur in lokalen Bereichen der Gurte
- Die Ausbreitung der Fließzonen beschränkt sich auf die Randfasern der Gurte und eine Ausbreitung in Trägerlängsrichtung
- Es tritt kein Durchplastizieren des gesamten Querschnittes ein.

Bilineares Werkstoffgesetz:

Die Spannungen haben die Zugfestigkeit des Werkstoffes erreicht (FEM-Analyse 8). Die Ausbreitung der Fließzonen erstreckt sich von den Randfasern bis ins Innere des Querschnittes. Die Länge der Fließzonen in den Randbereichen beträgt dabei ca.500mm. Die Spannung am DMS Steg beträgt ca.248N/mm² damit 3% über der plastischen Grenzspannung. Die Spannung im DMS-Gurt beträgt ca.297N/mm² und übersteigt die Spannung der Streckgrenze damit um 24%.

Es wird festgestellt:

- Der Querschnitt ist nahezu komplett durchplastiziert.
- Die Ausbreitung der Fließzonen verläuft bei Belastung zunächst entlang der äußeren Randbereiche und schließlich ins Innere des Querschnittes

5 Zusammenfassung und Ausblick

Die Berechnungen dieser Arbeit haben gezeigt, dass eine Ausnutzung der Tragfähigkeiten von Stahlprofilen möglich ist. Eine Mehrauslastung von bis zu 48% gegenüber dem idealplastischen Werkstoffgesetz wurde dabei für den Doppel-T-Querschnitt festgestellt und im experimentellen Versuch und FEM-Analyse bestätigt.

Die gewählten Näherungen des Werkstoffverhaltens zeigen annähernd gleiche Ergebnisse. Das trilineare Werkstoffgesetz beschreibt dabei den tatsächlichen Spannungs-Dehnungs-Verlauf des zu untersuchten Werkstoffes sehr genau. Im Vergleich der Berechnungen zeigte sich, dass der Bereich der Lüdersdehnung nur minimale Änderungen in den Ergebnissen aufweist und damit vernachlässigbar ist.

Die nichtlinearen Werkstoffgesetze können den tatsächlichen Spannungs-Dehnungs-Verlauf im kleinen Dehnungsbereich um die Streckgrenze sowie den Bereich der Lüdersdehnung nicht bzw. schlecht annähern. Die Berechnungen werden jedoch mit diesen Näherungen erheblich vereinfacht. Es zeigt sich, dass der Bereich der Lüdersdehnungen vernachlässigt werden kann. Die nichtlinearen Näherungen sind somit, mit den entsprechenden Werkstoffkonstanten, für die Beschreibung des realen Verfestigungsverhaltens duktiler Stähle sehr gut geeignet.

Im experimentellen Versuch konnten die Tragfähigkeit des Querschnittes für die linearen und nichtlinearen Berechnungen bestätigt werden. Die Grenzkraft der plastischen Biegemomente wurden erreicht. Die Berechnungen nach Elastizitätstheorie konnten ebenfalls mit sehr guten Ergebnissen bestätigt werden.

Die Analyse nach der Finiten-Element-Methode zeigt die Ausbreitung der Spannungen im Bauteil. Der Spannungsverlauf nach idealelastischem Werkstoffgesetz mit Wirkung des elastischen Grenzbiegemomentes konnte bestätigt werden. Es wurde festgestellt, dass sich die Spannungen unter Wirkung des plastischen Grenzbiegemomentes und idealelastisch-idealplastischen Werkstoffgesetzes nur in den Randfasern die Fließspannung erreicht wurde. Der Querschnitt weist somit noch weitere Tragreserven auf. Die Spannungsverteilung nach idealplastischem Werkstoffgesetz wurde somit nicht bestätigt. Die Analyse nach bilinearem Werkstoffgesetz zeigt ein vollständiges Durchplastizieren des Querschnittes. Nahezu alle Fasern haben die Streckgrenzen-Spannung im betrachteten Bereich überschritten. In den Randfasern wurde die Spannung der Zugfestigkeit des Werkstoffes erreicht. Die Ausbreitung der Fließzonen wird durch diese Analyse sehr gut sichtbar.

Ausblick

Die Berechnung nach dem Spannungs-Dehnungsverhalten verspricht erheblich höhere Mehrauslastungen eines Querschnittes im Gegensatz zur idealplastischen Berechnung. Die Berechnung des plastischen Momentes kann dabei für unterschiedlich gewählte Dehnungen erfolgen. Weiteren Untersuchungen im Bereich der Gleichmaßdehnung sowie die Erstellung von Profiltafeln kann die vorliegende Arbeit vervollständigen.

Höhere Ausnutzungen der Querschnitte mit dem Ziel der Materialeinsparungen und die damit in Hinblick auf die Umwelt verbundene Ressourcenschonung sind Anreiz für weitere Untersuchungen auf diesem Gebiet.

V Anlagen

Anlagenverzeichnis:

- Excel Berechnungen am Doppel-T-Profil	121
- Excel Berechnungen am Doppel-T-Profil	122
- Excel Berechnungen am Echteck-Profil	123
- Excel Berechnungen am Echteck-Profil	124
- CD- Rom mit:	
o Diplomarbeit im pdf-Format	
o HEB-Model ANSYS	
o Messergebnisse der experimentellen Versuchsdurchführung	
o Werkszeugnis EN10204 /2.2	
o Fotos der experimentellen Versuchsdurchführung	

Berechnungen am Doppel-T-Profil:

Bilineares Werkstoffgesetz und
unterschiedliche Querschnittshöhen

Eingabe	
Gurtbreite b in mm	100,00
Gurtdicke t in mm	10,00
Stegdicke s in mm	6,00
Emodul in N/mm ²	210000,00
f _{y,k} in N/mm ²	240,00
Ef=f _{y,k} /Emodul	0,00
f _{u,k} in N/mm ²	360,00
ε ₂	0,20
n	239,31

Querschnittshöhe	Elastischer	Plastische	Mel	Mpl Steg	Mpl Gurt	Mpl ges.	Mpl	Ausnutzung
h/2 in mm	Höhe in mm	Höhe in mm	in N/mm ²	in KNm	in KNm	in KNm	alt	in %
50,00	0,29	49,71	78,37	2,92	31,35	34,27	23,90	43
60,00	0,34	59,66	112,85	4,60	38,53	43,12	30,00	44
70,00	0,40	69,60	153,60	6,66	45,71	52,37	36,38	44
80,00	0,46	79,54	200,62	9,11	52,89	62,00	43,06	44
90,00	0,51	89,49	253,91	11,94	60,08	72,02	50,02	44
100,00	0,57	99,43	313,47	15,15	67,27	82,42	57,26	44
110,00	0,63	109,37	379,30	18,75	74,47	93,21	64,80	44
120,00	0,69	119,31	451,40	22,73	81,66	104,39	72,62	44
130,00	0,74	129,26	529,76	27,09	88,85	115,95	80,74	44
140,00	0,80	139,20	614,40	31,84	96,05	127,89	89,14	43
150,00	0,86	149,14	705,31	36,97	103,25	140,22	97,82	43
160,00	0,91	159,09	802,48	42,49	110,44	152,93	106,80	43
170,00	0,97	169,03	905,93	48,39	117,64	166,03	116,06	43
180,00	1,03	178,97	1015,64	54,67	124,84	179,51	125,62	43
200,00	1,14	198,86	1253,88	68,39	139,23	207,63	145,58	43
225,00	1,29	223,71	1586,94	87,70	157,23	244,93	172,16	42
300,00	1,71	298,29	2821,22	160,00	211,22	371,22	262,70	41
325,00	1,86	323,14	3311,02	188,90	229,22	418,12	296,48	41
350,00	2,00	348,00	3840,00	220,20	247,22	467,42	332,06	41
400,00	2,29	397,71	5015,51	289,99	283,21	573,20	408,62	40
450,00	2,57	447,43	6347,76	369,37	319,21	688,58	492,38	40
500,00	2,86	497,14	7836,73	458,34	355,21	813,56	583,34	39

Anlage 1 Excel-Berechnungen Doppel-T-Profil I

Berechnungen am Doppel-T-Profil:

Bilineares Werkstoffgesetz und
unterschiedliche Querschnittshöhen

Eingabe	
Gurtbreite b in mm	300,00
Gurtdicke t in mm	36,00
Stegdicke s in mm	19,00
Emodul in N/mm ²	210000,00
f _{y,k} in N/mm ²	240,00
ε _f =f _{y,k} /Emodul	0,00
f _{u,k} in N/mm ²	360,00
ε ₂	0,20
n	239,31

Querschnittshöhe	Elastischer	Plastische	Mel	Mpl Steg	Mpl Gurt	Mpl ges.	Mpl	Ausnutzung
h/2 in mm	Höhe in mm	Höhe in mm	in N/mm ²	in KNm	in KNm	in KNm	alt	in %
50,00	0,29	49,71	248,16	0,98	224,43	225,41	166,78	35
60,00	0,34	59,66	357,36	2,97	298,44	301,41	220,35	37
70,00	0,40	69,60	486,40	6,11	373,52	379,63	274,84	38
80,00	0,46	79,54	635,30	10,43	449,27	459,70	330,24	39
90,00	0,51	89,49	804,05	15,93	525,46	541,40	386,54	40
100,00	0,57	99,43	992,65	22,63	601,97	624,60	443,77	41
110,00	0,63	109,37	1201,11	30,53	678,71	709,24	501,90	41
120,00	0,69	119,31	1429,42	39,63	755,61	795,25	560,94	42
130,00	0,74	129,26	1677,58	49,94	832,65	882,60	620,90	42
140,00	0,80	139,20	1945,60	61,46	909,79	971,26	681,77	42
150,00	0,86	149,14	2233,47	74,19	987,02	1061,21	743,55	43
160,00	0,91	159,09	2541,19	88,13	1064,31	1152,44	806,24	43
170,00	0,97	169,03	2868,77	103,28	1141,65	1244,94	869,85	43
180,00	1,03	178,97	3216,20	119,64	1219,04	1338,69	934,36	43
200,00	1,14	198,86	3970,61	156,01	1373,94	1529,95	1066,13	44
225,00	1,29	223,71	5025,31	208,29	1567,71	1776,01	1235,98	44
300,00	1,71	298,29	8933,88	410,66	2149,66	2560,33	1779,70	44
325,00	1,86	323,14	10484,90	493,30	2343,77	2837,08	1972,34	44
350,00	2,00	348,00	12160,00	583,53	2537,93	3121,47	2170,69	44
400,00	2,29	397,71	15882,45	786,77	2926,32	3713,11	2584,47	44
450,00	2,57	447,43	20101,22	1020,38	3314,81	4335,21	3021,05	43
500,00	2,86	497,14	24816,33	1284,36	3703,36	4987,74	3480,44	43

Anlage 2 Excel-Berechnungen Doppel-T-Profil II

Berechnungen am Rechteck:

Bilineares Werkstoffgesetz und unterschiedliche Querschnittshöhen

Eingabe	
Breite b in mm	20,00
Emodul in N/mm ²	210000,00
f _{y,k} in Nmm ²	240,00
ε _f =f _{y,k} /Emodul	0,0011
f _{u,k} in Nmm ²	360,00
ε ₂	0,20
n	239,31

Querschnittshöhe	Elastischer	Plastische	Mel	Mpl	Mpl ges.	Mpl	Ausnutzung
h/2 in mm	Höhe in mm	Höhe in mm	in N/mm ²	in KNm	in KNm	alt	in %
10,00	0,06	9,94	10,45	0,64	0,64	0,48	1,33
20,00	0,11	19,89	41,80	2,56	2,56	1,92	1,33
30,00	0,17	29,83	94,04	5,76	5,76	4,32	1,33
40,00	0,23	39,77	167,18	10,23	10,23	7,68	1,33
50,00	0,29	49,71	261,22	15,99	15,99	12,00	1,33
60,00	0,34	59,66	376,16	23,02	23,02	17,28	1,33
70,00	0,40	69,60	512,00	31,34	31,34	23,52	1,33
80,00	0,46	79,54	668,73	40,93	40,93	30,72	1,33
90,00	0,51	89,49	846,37	51,80	51,80	38,88	1,33
100,00	0,57	99,43	1044,90	63,95	63,95	48,00	1,33
110,00	0,63	109,37	1264,33	77,38	77,38	58,08	1,33
120,00	0,69	119,31	1504,65	92,09	92,09	69,12	1,33
130,00	0,74	129,26	1765,88	108,08	108,08	81,12	1,33
140,00	0,80	139,20	2048,00	125,35	125,35	94,08	1,33
150,00	0,86	149,14	2351,02	143,89	143,90	108,00	1,33
160,00	0,91	159,09	2674,94	163,72	163,72	122,88	1,33
170,00	0,97	169,03	3019,76	184,82	184,83	138,72	1,33
180,00	1,03	178,97	3385,47	207,21	207,21	155,52	1,33
190,00	1,09	188,91	3772,08	230,87	230,87	173,28	1,33
200,00	1,14	198,86	4179,59	255,81	255,81	192,00	1,33
210,00	1,20	208,80	4608,00	282,03	282,03	211,68	1,33
220,00	1,26	218,74	5057,31	309,53	309,53	232,32	1,33
230,00	1,31	228,69	5527,51	338,31	338,31	253,92	1,33
240,00	1,37	238,63	6018,61	368,37	368,37	276,48	1,33
250,00	1,43	248,57	6530,61	399,70	399,71	300,00	1,33
260,00	1,49	258,51	7063,51	432,32	432,33	324,48	1,33
270,00	1,54	268,46	7617,31	466,21	466,22	349,92	1,33
280,00	1,60	278,40	8192,00	501,39	501,40	376,32	1,33
290,00	1,66	288,34	8787,59	537,84	537,85	403,68	1,33
300,00	1,71	298,29	9404,08	575,57	575,58	432,00	1,33
310,00	1,77	308,23	10041,47	614,58	614,59	461,28	1,33
320,00	1,83	318,17	10699,76	654,87	654,88	491,52	1,33
330,00	1,89	328,11	11378,94	696,44	696,45	522,72	1,33
340,00	1,94	338,06	12079,02	739,29	739,30	554,88	1,33
350,00	2,00	348,00	12800,00	783,42	783,43	588,00	1,33
360,00	2,06	357,94	13541,88	828,82	828,84	622,08	1,33
370,00	2,11	367,89	14304,65	875,51	875,52	657,12	1,33
380,00	2,17	377,83	15088,33	923,47	923,49	693,12	1,33

Anlage 3 Excel-Berechnungen Rechteck I

Berechnungen am Rechteck: Bilineares Werkstoffgesetz und unterschiedliche Querschnittshöhen

Eingabe	
Höhe h in mm	100,00
Emodul in N/mm ²	210000,00
$f_{y,k}$ in N/mm ²	240,00
$\epsilon_f = f_{y,k} / E_{\text{modul}}$	0,0011
$f_{u,k}$ in N/mm ²	360,00
ϵ_2	0,20
n	239,31

hel in mm	0,29
hpl in mm	49,71

Querschnittsbreite	Mel	Mpl	Mpl ges.	Mpl	Ausnutzung
b in mm	in N/mm ²	in KNm	in KNm	alt	in %
10,00	130,61	7,99	7,99	6,00	1,33
20,00	261,22	15,99	15,99	12,00	1,33
30,00	391,84	23,98	23,98	18,00	1,33
40,00	522,45	31,98	31,98	24,00	1,33
50,00	653,06	39,97	39,97	30,00	1,33
60,00	783,67	47,96	47,97	36,00	1,33
70,00	914,29	55,96	55,96	42,00	1,33
80,00	1044,90	63,95	63,95	48,00	1,33
90,00	1175,51	71,95	71,95	54,00	1,33
100,00	1306,12	79,94	79,94	60,00	1,33
110,00	1436,73	87,93	87,94	66,00	1,33
120,00	1567,35	95,93	95,93	72,00	1,33
130,00	1697,96	103,92	103,92	78,00	1,33
140,00	1828,57	111,92	111,92	84,00	1,33
150,00	1959,18	119,91	119,91	90,00	1,33
160,00	2089,80	127,90	127,91	96,00	1,33
170,00	2220,41	135,90	135,90	102,00	1,33
180,00	2351,02	143,89	143,90	108,00	1,33
190,00	2481,63	151,89	151,89	114,00	1,33
200,00	2612,24	159,88	159,88	120,00	1,33
210,00	2742,86	167,88	167,88	126,00	1,33
220,00	2873,47	175,87	175,87	132,00	1,33
230,00	3004,08	183,86	183,87	138,00	1,33
240,00	3134,69	191,86	191,86	144,00	1,33
250,00	3265,31	199,85	199,85	150,00	1,33
260,00	3395,92	207,85	207,85	156,00	1,33
270,00	3526,53	215,84	215,84	162,00	1,33
280,00	3657,14	223,83	223,84	168,00	1,33
290,00	3787,76	231,83	231,83	174,00	1,33
300,00	3918,37	239,82	239,83	180,00	1,33

Anlage 4 Excel-Berechnungen Rechteck II

VI Literaturverzeichnis

Fachbücher:

- [1]. **Kindmann, Rolf und Frickel, Jörg.** *Elastische und plastische Querschnittstragfähigkeiten.* Berlin : Ernst&Sohn, 2002.
- [2]. **K.-A.Reckling.** *Plastizitätstheorie und ihre Anwendung auf Festigkeitsprobleme.* Berlin : Springer, 1967.
- [3]. **Burth und Brocks.** *Plastizität.* Btaunschweig Wiesbaden : Vieweg, 1992.
- [4]. **Wagenknecht, Gerd.** *Stahlbau-Praxis .* Berlin 2002 : Bauwerk Verlag GmbH.
- [6]. **Burth, Knuth und Brocks, Wolfgang.** *Plastizität Grundlagen und Anwendungen für Ingenieure.* Braunschweig/ Wiesbaden : Vieweg, 1992.
- [7]. **Issler, Ruof und Häfele.** *Festigkeitslehre - Grundlagen.* Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2003.
- [8]. **Bochmann, Fritz.** *Statik im Bauwesen Festigkeitslehre.* Berlin : Verlag Bauwesen Berlin, 2001. Bd. Band 2.
- [9]. **Blumenauer, Horst.** *Werkstoffprüfung.* Berlin : s.n., 1984.
- [10]. **Hoffmann, Karl.** *Eine Einführung in die Technik des Messens mit Dehnmeßstreifen.* s.l. : Hottinger Baldwin Messtechnik GmbH, Darmstadt.
- [11]. **Schneider.** *Bautabellen für Ingenieure.* s.l. : Werner, 2006.
- [12]. **Petersen.** *Stahlbau.* Braunschweig Wiesbaden : Vieweg&Sohn, 1993.

Vorlesungsskripte:

- 13. **Mahn, Prof.Dr.-Ing.Uwe.** Skript CAE-Techniken. Hochschule Mittweida : s.n., Oktober 2010.
- 5. **Priebe, Dr.-Ing.Jürgen und Starossek, Dr.-Ing. Uwe.** Stahlbau I+II; Skriptum zur Vorlesung. Technische Universität Hamburg-Harburg : s.n., 2008.

Normen:

- DIN 18800, November 2008
- DIN1025-2, November 1995
- DIN1026-1, März 2003

verwendete Software:

- Ansys Workbench, Version 13.0
- MS-Word/Excel2010, Microsoft
- Programm zur Fließkurvenbestimmung (P6_2) aus [8]

Erklärung zur selbständigen Anfertigung:

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe.

Bearbeitungsort, Datum

Unterschrift